APOLLONII PERGÆI CONICORUM LIBRI QUATUOR,

SERENISSIMO PRINCIPI

JOANNI GASTONI AB ETRURIA

DICATI

UNA CUM LEMMATIBUS

PAPPI ALEXANDRINI

ET COMMENTARIIS

EUTOCII ASCALONITÆ:

Quæ olim primus vulgavit omnia

FEDERICUS COMMANDINUS URBINAS,

E GRÆCO A SE CONVERSA,

Expurgata mendis, & commentariis illuſtrata:

Nuperrimè autem in lucem prodeunt,

Ab aliis etiam erratis longè plurimis,
Quæ, ut primùm edita ſunt, identidem irrepſerunt,
Vindicata.

BIBLIOTECA NAZ. ROMA

PISTORII Ex Nova Typographia Stephani Gatti.

Superiorum Permiſſu Anno CIϽ IϽCXCVI.

Digitized by Google

Digitized by Google

SERENISS.MO PRINCIPI
JOANNI GASTONI

NICOLAUS BUTI.

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

BENE ac ſapienter, PRINCEPS SERENISSIME, Publium illum, qui primus, devicta ſubactaque Populo Romano Africa, in familiã Scipionum ampliſſimum cognomen invexit, dicere ſolitum accepimus, nunquam minùs ſeſe eſſe otioſum, quàm quum eſſet otioſus. Digna ſanè eo viro vox in rebus cum privatis, tum publicis occupatiſſimo: digna homine libero; & quam non admirentur ſolùm, ſed imitentur etiam, quicunque communi omnium bono prodeſſe, ſi quid poſſint, ſtuduerint. Itaque ut mihi primùm licuit, poſt navatam liberalioribus artibus operam, quantùm ingenii tenuitas, & virium imbecillitas tulerat; meditatus ſum mecum ipſe aliquid, quo non tam occuparem, quàm cohoneſtarem otium meum. quemadmodum enim æqua ratione ferendi ſunt ii, qui otium in negotio quæſiverint; ita prorſus negotium in otio quærere apprime

Digitized by Google

laudandum. At enim verò quum neque mihi tantùm fiderem, ut aliquid novi molirer ex me; neque vitam ſilentio nobis tranſigendam eſſe moneremur, qui præſtare cæteris animantibus ſtudeamus: ad illa maximè doctiſſimorum hominum opera accuratiùs vulganda ſum aggreſſus, quibus, ut adoleſcentium ſtudioſorum ingenia intelligebam mirificè adiuvari; ita ſummo ipſorum incommodo, & gravi rei literariæ jactura privari dolebam vehementer. Quod tametſi uſuvenire in reliquis humanioribus facultatibus ſolet; tum verò in Mathematicis accidit quàm ſæpiſſime. At ſi quos fortaſſe unquam inſanabile illud ſcribendi cacoethes extimulaverit; eorum libri cuduntur, recuduntur que quotidie. Hac tempeſtate non Juriſconſulti, ſed legulæii, qui ſe juriſperitos venditant;

Quum ſcribant docti, indoctique volumina paſſim,

ſcriptitant omnes ſuas ſententias, conſilia, reſponſa; eduntque in lucem,& bibliothecas inferciunt; ut jam ferè nec pretium emendis, nec ætas legendis ſatis eſſe poſſit. Neque tamen id à me dictum accipi velim; quòd Juriſprudentiæ operam daturus, in eas diſciplinas, neſcio quo ductus genio, qua earundem illectus ſpecie, impenſiùs incubuerim. Quinimò id ago; quòd, quum Piſis tyrocinium ſtudiorum poſuiſſem, legalem artem à conſultiſſimis viris accepturus; avocarentque me aliò, ubi per otium licuiſſet, Mathematicæ meditationes, quibus mens reficitur & recreatur; vix auctores in primis nobiles, longeque omnium in iis pertractandis præſtantiſſimi veniebant ad manus: præſertim autem Apollonii Pergæi Conica Elementa, quæ tranſcribi ex integro oporteret. adeo enim, ex quo edita ſunt, perierunt; ut edita quodammodo, & non edita eſſe cenſeantur. Accedebat verò voluntas obſequens ſatisfaciendi iis, qui deſiderio & ſtudio graviſſimi hujus Geometræ tenerentur. Movebat etiam me amantiſſimi Præceptoris conſilium prudens, à quo fueram hiſce artibus ſubciſivis temporibus eruditus. Præterea vel maximè hortabatur, & impellebat vehementiùs Antonius Magliabechi, vir infinitæ pene lectionis, & omnis eruditionis; quem ut quondam Cato fuit appellatus, jure ac meritò helluonem librorum nuncupaverim. Quæ quoniam ita ſe habebant, ad Apollonium ſecundò evulgandum me converti, factus in alieno opere ingenioſus, qui fieri cæteroqui nequiviſſem in proprio. Et planè gravioribus non dum aſſueti, quibus ſolidiorem gloriam aſſequeremur, umbratili veluti pugna nos exercuimus, ut laureolam in muſtaceo quæſiviſſe videamur. Nihilò tamen minùs, neque

que

que inutilem fore ratus, nec injucundam operam meam, ſum rem perdifficilem perſequutus; quæ & mihi non multum laudis, plus quàm ſatis incommodi, cæteris autem utilitatis plurimum afferre poſſet. Summa enim ope niti oportere me cenſui, ut ad omnium manus; ad tuas verò, Princeps Optime, quàm emendatiſſimus perveniret: quo in genere laboris graviſſimos etiam viros reperio ſæpe eſſe verſatos; ſed percenſere hìc ſingulos numerando nec libet, nec vacat. Unus eſſe inſtar omnium Peripateticorum Princeps poteſt, qui, ut Alexandro Magno morem gereret, quem ſuſceperat ſcientiis informandum univerſis, Homeri poemata emendavit. Sed ejus quidem ſummi Philoſophi ingenium habeo, quod deſiderem; fortunam certè, qua eo facto Regiam ſibi gratiam promerebatur, non invideo: quippe tu, etſi cui fortè amplioribus Imperii finibus ceſſeris; magnitudine tamen animi, acumine ingenii, & gloria literarum nemini non antecellis. Quamobrem ſequar in hoc Federici Commandini inſtitutum, qui non exteros ſibi Patronos arceſſivit; ſed in Urbinates meritiſſimos Principes ſuos defixit oculorum aciem, quibus Apollonium hunc ipſum nuncuparet. Anne aliena nobis, quoniam noſtra plus aliis placent? Minimè verò. Cui enim potiùs, quàm tibi, tenuiſſimus hic noſter erat vovendus labor; quo duce & auſpice ſtudiorum ac præſide, diu multumque in celeberrima Academia literarium pulverem trivimus? Cui potiùs, quàm tibi, liberaliſſimæ omnes facultates ſe dedant illuſtrandas, à quibus adeo te intelligunt illuſtrari? Cui demum potiùs, quàm tibi, hæc una potiſſimùm ſcientiarum domina ſe commendet, à quò & ornamenta maxima, & in dies incrementa deſumpſit? Ferunt, ut primùm Romanorum arva ipſis Imperatorum manibus, eburneo ſcipione depoſito, cœpta ſunt coli, & ſegetes creviſſe lætiùs; & uberiorem fructum, gaudente quodammodo terra, reddidiſſe. Dicam veriùs, Mathematicas diſciplinas, incultas jam olim ſpiniſque obſitas, & modò cultiſſimas eſſe tua induſtria, & in meliorem frugem veniſſe. Etenim eæ quaſi geſtiunt, ac magnificè gloriantur; quum ſentiant, & ſua contrectari digniſſimis Imperio manibus inſtrumenta; & tuis ſe abunde copioſeque ſudoribus irrigari. Quod eò etiam à te factum puto; ne in ſecretiora Naturæ arcana penetraturus, veramque rerum prehenſurus effectricem causam, ut Coſmus, & Laurentius, ac Ferdinandus tuæ gentis lumina, eo ſtudio ſummè delectati, vel ἀγεωμέτρητος accederes; quod imperiti quidam faciunt, Platone licèt contra monente ac vetante:

te : vel iis deſtitutus artibus, quas λαβὰς τῆς φιλοσοφίας Xenocrates appellabat. Quis enim ignorat, veterem illam rerum naturalium altiſſimam contemplationem, quam antiquiſſimi Philoſophi à Geometria nunquam patiebantur eſſe ſejunctam, non nullorum incuria, qui ſine Mathematicis facultatibus ſoli ſibi ſapere videbantur, intermortuam jacuiſſe diu ac pene conſepultam; Mediceæ verò Domus beneficio erectam & excitatam, Regio tuo ſinu munificentiùs exceptam conquieviſſe. Qua de re non ſim à veritate alienus habendus, aut genio nimis indulgens, qui non ſolùm Mediceæ Gentis gloriam domique partam, ſed exteram quoque Urbinatum Principum, & Victoriæ Sanguine largè derivatam, prædicem te eſſe complexum, quorum publico cenſu florebant literæ, vivebant homines literati. Ac proinde tibi, hæredi eorum ſanguinis, & ſupellectilis pretioſioris, ac bonorum immortalium, Appollonium Pergæum, Conica Elementa pertractantem, dicatum olim illis nunc dico; ut non tam dicatus, quàm redditus eſſe videatur. Tu verò, quum ingenuas artes unicè ames, nec in poſtremis habeas Mathematicas diſciplinas, munuſculum hoc, non meum, ſed alienum, à me tamen mendis valde pluribus expurgatum accipe. Non ſum neſcius majora oblaturos, qui præſtare majora poſſunt ingenio: officioſiorem certè futurum neminem.

Piſtorii IX. Kal. Aug. CIϽIϽCXCVI.

DE APOLLONIO
EX PAPPO.

EUCLIDIS libros quatuor conicorum cùm Apollonius expleviſſet, ac quatuor alios adjunxiſſet; octo conicorum libros cõfecit. Ariſtæus autem, qui ſcribit ea, quæ ad hoc uſque tempus tradita ſunt, ſolidorum locorum libros quinque conicis cohærentes vocavit: & qui ante Apollonium fuerunt, trium conicarum linearum, unam quidem coni acutianguli, alteram rectanguli, tertiam verò obtuſianguli coni ſectionem appellarunt. Quoniam autem in unoquoque horum trium conorum, differenter ſectorum, tres lineæ fiunt: dubitans, ut apparet, Apollonius; cur nam qui ante ſe hanc tractationem expleverant, unam quidem acutianguli coni ſectionem vocaverunt, quæ poteſt & rectanguli & obtuſianguli coni eſſe; alteram rectanguli, quæ poteſt & in acutiangulo & obtuſiangulo cono reperiri; tertiam verò obtuſianguli, quæ & in acutiangulo & rectangulo cono ineſſe poteſt; mutatis nominibus, quæ quidem acutianguli coni ſectio nominatur, ellipſim appellat; quæ rectanguli, parabolen; quæ verò obtuſianguli, hyperbolen; unicuique ab aliquo proprio accidente nomen imponens. Spatium enim quoddam ad lineam quampiam comparatum in acutianguli coni ſectione deficiens fit quadrato; in obtuſianguli coni ſectione quadrato excedens; in rectanguli verò coni ſectione neque deficiens, neque excedens. Hoc autem illi accidit, quòd non conſideravit, juxta unum duntaxat caſum plani conum ſecantis, & tres lineas gignentis, in unoquoque conorum aliam atque aliam fieri lineam, quam à coni proprietate nominarunt. Si enim ſecans planum ducatur uni lateri coni æquidiſtans; una tantùm ex tribus lineis efficitur ſemper eadem, quam Ariſtæus illius coni ſectionem appellavit.

EX EUTOCIO, ET GEMINO.

APollonius Geometra natus eſt Pergæ, quæ Pamphiliæ civitas eſt, tempore Ptolemæi Evergetæ, ut tradit Heraclius in Archimedis vita. qui etiam ſcribit Archimedem quidem primùm conica theoremata fuiſſe aggreſſum; Apollonium verò, cùm ea inveniſ-

ſet

ſet ab Archimede non dum edita, ſicut propria ſua edidiſſe: neque id verè, ut mea fert opinio. nam & Archimedes multis in locis velut antiquioris conicorum inſtitutionis mentionem facere videtur: & Apollonius ea ſcribit, non ut à ſe ipſo inventa. non enim dixiſſet, uberiùs & univerſaliùs hæc à ſe, quã ab aliis tractata fuiſſe. Sed, quod ſcribit Geminus, verum eſt. Antiqui, inquit, conum diffinientes, rectanguli circumvolutionem, manẽte uno eorum, quæ circa rectum angulum ſunt, latere; & conos omnes rectos, & unam in ſingulis ſectionem fieri arbitrati ſunt: in rectangulo quidem cono vocatam parabolen, in obtuſiangulo hyperbolen, in acutiangulo autem ellipſim. atque ita nominatas apud ipſos ſectiones paſſim invenias. Quemadmodum igitur antiquis illis in unaquaque triangulorum ſpecie contemplantibus duos rectos, primùm in æquilatero, deinde in æquicruri, poſtea in ſcaleno; ætate poſteriores univerſale theorema demonſtrarunt ejuſmodi: *Omnis trianguli interiores tres anguli duobus rectis ſunt æquales:* ita & in coni ſectionibus rectanguli quidem coni ſectionem dictam, in rectangulo tantùm cono contemplati ſunt, ſecto ſcilicet plano ad unum coni latus recto; obtuſianguli autem coni ſectionem in cono obtuſiangulo factam demõſtrarunt; & acutianguli ſectionem in cono acutiangulo, ſimiliter in omnibus conis ducentes plana ad unum eorum latus recta: quod & antiqua ſectionum nomina indicãt. Verùm poſtea Apollonius Pergæus univerſè inſpexit in omni cono tam recto, quàm ſcaleno omnes ſectiones ineſſe, juxta plani ad conum differentem inclinationem. quamobrẽ illius temporis homines admirati mirificam conicorum theorematum demonſtrationem magnum Geometram ipſum appellarunt. Hæc quidem Geminus in ſexto Mathematicarum præceptionum libro ſcripta reliquit.

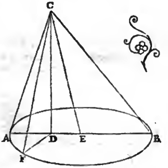
PAPPI ALEXANDRINI

LEMMATA IN PRIMVM LIBRVM CONICORVM APOLLONII.

CVM COMMENTARIIS FEDERICI COMMANDINI VRBINATIS.

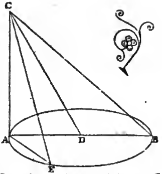
LEMMA PRIMUM.

SIT conus, cuius baſis circulus AB, & vertex punctum C. Si igitur æquicruris eſt conus; manifeſtò conſtat, lineas omnes, quæ ab ipſo C ad AB circuli circunferentiam ducuntur, inter ſe ſe æquales eſſe. Si verò ſcalenus eſt; oporteat invenire, quæ maxima ſit, & quæ minima.



DVCATVR à puncto C ad planum circuli A B linea perpendicularis. quæ primum cadat intra circulum; ſitque C D: & ſumatur centrum eius, quod ſit E; & iuncta D E producatur in utranque partem ad puncta A B; deinde A C, C B iungantur. Dico ipſam B C maximam eſſe, & A C minimam linearum omnium, quæ à puncto C ad circulum A B pertinent. Ducatur enim alia quædam linea C F, & F D iungatur. maior igitur eſt B D, quàm D F. communis autem C D; & anguli, qui ad D recti. ergo maior eſt B C, quàm C F. eodem modo & C F maior oſtendetur, quàm C A. ex quibus apparet lineam C B omnium maximam, A C verò minimam eſſe. 7. tertij. 3 diff. 11. 47. primi

Rurſus à puncto C perpendicularis ducta cadat in ipſius A B circuli circunferentiam, quæ ſit C A: & cum circuli centro D copulata A D producatur in B: &



B C iungatur. Dico B C maximam eſſe, & A C minimam. lineam igitur C B maiorem eſſe, quàm C A perſpicuum eſt. ducatur autem alia quædã linea C E; & iungatur A E. Itaque quoniam A B diameter eſt, neceſſariò maior erit, quàm A E; & continet A C cum ipſis A B, A E angulũ rectum. ergo B C, quàm C E maior erit; & ſimiliter maior, quàm cæteræ omnes. Eodem modo & E C maior oſtẽdetur, quàm C A. Quare ſequitur, ut B C maxima ſit, A C verò minima linearum omnium, quæ ab ipſo C ad circulum A B pertinent.

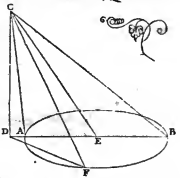
18. primi,

15. tertij, 3. diff. undecimi,

Iisdem poſitis cadat perpendicularis CD extra circulum: & ad E circuli centrum ducta D E producatur: iunganturque A C, B C. Dico B C maximam, & A C minimam eſſe omnium, quæ à puncto C ad A B circulum perducuntur. conſtat nanque B C maiorem eſſe ipſa C A. ſed & maior erit omnibus, quæ ab ipſo C in circunferentiã circuli A B cadunt, ducatur enim alia quædam linea C F; & D F iungatur. Cùm igitur B D per centrum tranſeat, maior eſt, quàm D F. eſt autem C D perpendicularis ad lineas D B, D F, quoniam & ad ipſum planum. ergo maior erit B C, quàm C F. & ſimiliter maior, quàm aliæ omnes. perſpicuum eſt igitur ipſam C B maximam eſſe. At verò A C minimam hoc modo oſtendemus. Quoniam enim minor eſt A D, quàm D F; atque eſt ad ipſas perpendicularis D C: minor erit A C, quàm C F. & ita minor, quàm aliæ. linea igitur A C minima eſt, & B C maxima omnium, quæ à puncto C ad A B circuli circunferentiam perducuntur.

8. tertij 3. diff. undecimi.

8. tertij,



Diffinitio prima Apollonij

Si ab aliquo puncto ad circunferentiam circuli, qui non ſit in eodem plano, in quo punctum, coniuncta recta linea in utranque partem producatur: &c.

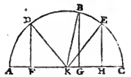
Convenienter Apollonius addidit, in utranque partem producatur: cùm uniuſcuiuſque coni generationem tradat. Si enim æquicruris ſit conus, fruſtra produceretur, quòd recta linea, quæ convertitur, circunferentiam circuli perpetuò contingit; quippecùm ab ea punctum manens ſemper æquali diſtet intervallo. Sed quoniam poteſt & ſcalenus eſſe conus, in quo, ut iam demonſtratum eſt, & maximum, & minimum latus invenitur, neceſſariò illud appoſuit; ut quæ minima eſt linea, uſqueadeo augeri intelligatur, quoad fiat maximæ æqualis: & propterea circuli circunferentiam ſemper contingat.

LEMMA II.

SIT linea A B C, & poſitione data A C; omnes autem, quæ ab ipſa A B C ad A C perpendiculares ducuntur, ita ſe habeant, ut quadratum uniuſcuiuſque ipſarum æquale ſit rectangulo baſis partibus, quæ ab ipſa ſecantur, contento. Dico A B C circuli circunferentiam eſſe; diametrum autem ipſius lineam A C.

DVCAN-

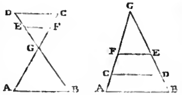
DVCANTVR enim à punctis D,B,E perpendiculares D F,B G,E H. ergo quadratum D F æquale eſt rectangulo A F C; & quadratum B G rectangulo A G C: ipſum verò E H quadratum rectangulo A H C æquale. Secetur A C bifariam in K, & D K, K B, K E iungantur. Itaque quoniam A F C rectangulum unà cum quadrato F K eſt æquale quadrato A K, & ipſi A F C æquale eſt D F quadratum: erit quadratum D F unà cum ipſo FK, hoc eſt quadratum D K æquale quadrato A K. quare linea A K ipſi K D eſt æqualis. Similiter oſtendemus, & unàquàque linearum B K, E K ipſi A K, vel K C æqualem eſſe. ergo A B C circuli circũferentia eſt circa centrum K, hoc eſt circa diametrum A C. 5. ſecũdi. 47. primi. 15 diffin. primi.



LEMMA III.

SINT tres lineæ æquidiſtantes A B, C D, E F: & in ipſas ducantur duæ rectæ lineæ A G F C, B G E D. Dico vt rectangulum, quod fit ex A B & E F, ad quadratum C D, ita eſſe rectangulum A G F ad quadratum G C.

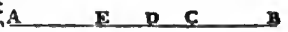
QVONIAM enim ut linea A B ad F E, hoc eſt ut rectangulum ex AB & FE ad FE quadratum, ita linea A G ad ipſam G F, hoc eſt rectangulum A G F ad quadratum G F: erit ut rectangulum ex A B & F E ad quadratum F E, ita rectangulum A G F ad quadratum G F. ſed ut quadratum F E ad quadratum CD, ſic quadratum FG ad quadratum G C. ex æquali igitur ut rectangulum ex A B & F E ad quadratum C D, ſic rectangulum A G F ad G C quadratum. lemm. in 22. decimi 4. ſexti. 4. & 22. ſexti.



LEMMA IV.

SIT vt A B ad B C, ita A D ad D C: & ſecetur A C bifariam in puncto E. Dico rectangulum B E D quadrato E C æquale eſſe: itemque rectangulum A D C æquale rectangulo B D E, & rectangulum A B C rectangulo E B D.

QVONIAM enim ut A B ad B C, ita eſt A D ad D C; erit componendo, ſumptiſque antecedentium dimidijs, & per conuerſionem rationis, ut B E ad E C, ita C E ad E D. rectangulum igitur BED æquale eſt CE quadrato. commune auferatur, quadratum ſcilicet E D. ergo quod relinquitur, rectangulum A D C rectangulo B D E eſt æquale. Rurſus quoniam rectangulum B E D æquale eſt quadrato C E, utraque auferantur à quadrato B E. reliquum igitur rectangulum A B C rectangulo E B D æquale erit. quæ omnia demonſtrare oportebat. A 17. ſexti. B C



COMMENTARIVS.

ERIT componendo, ſumptiſque antecedentium dimidijs, & per conuerſionem rationis.] *Quoniã vt A B ad B C, ita A D ad D C; erit componendo vt A B, B C ad C B,* A

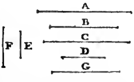
ita A C ad C D; & antecedentium dimidia, ut E B ad B C, ita E C ad C D. eſt enim A E ipſius A C dimidia. quare per converſionem rationis ut B E ad E C, ita C E ad E D.

B Commune auferatur, quadratum ſcilicet E D.] *Eſt enim quadratum C E æquale*
5. ſecũdi. 8 *rectangulo A D C unà cum quadrato E D: & rectangulum B E D æquale rectangulo B D E unà cum E D quadrato. quare ſublato communi, relinquitur rectangulum A D C rectangulo B D E æquale.*

C Rurſus quoniam rectangulum B E D æquale eſt quadrato E C, utraque auferantur à quadrato B E.] *Nam cum linea A C bifariam ſecetur in E, atque ipſi addatur linea C B;*
6. ſecũdi. 2 *rectangulum A B C, & quadratum C E æqualia ſunt quadrato B E. rurſus quadrato B E æqualia ſunt utraque rectangula E B D, B E D. ſi igitur ab ipſo B E quadrato æqualia auferantur, videlicet rectangulum B E D, & quadratum C E; relinquitur rectangulum A B C rectangulo E B D æquale eſſe.*

LEMMA V.

HABEAT A ad B proportionem compoſitam ex proportione C ad D, & ex proportione E ad F. Dico C ad D proportionem compoſitam habere ex proportione A ad B, & proportione F ad E.

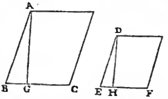


FIAT enim proportio D ad G eadem, quæ eſt E ad F. & quoniam proportio A ad B compoſita eſt ex proportione C ad D, & proportione E ad F, hoc eſt D ad G. proportio autem compoſita ex proportione C ad D, & D ad G eſt eadem, quæ C ad G. erit ut A ad B, ita C ad G. Rurſus quoniam C ad D proportionem habet compoſitam ex proportione C ad G, & proportione G ad D. ſed proportio C ad G demonſtrata eſt eadem, quæ A ad B: & convertendo proportio G ad D eadem eſt, quæ F ad E. habebit C ad D proportionem compoſitam ex proportione A ad B, & proportione F ad E.

LEMMA VI.

SINT duo parallelogramma AC, DF æquiangula, quorum angulus B ſit æqualis angulo E. Dico ut rectangulum ABC ad rectangulum DEF, ita eſſe parallelogrammum AC ad DF parallelogrammum.

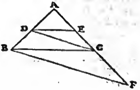
Si enim anguli B, E recti ſint, illud perſpicuè conſtat: ſin minus, demittantur perpendiculares A G, D H. & quoniam angulus B æqualis eſt angulo E; & angulus ad G rectus æqualis recto ad H: erit triangulum A B G triangulo D E H æquiangulum. quare ut B A ad A G, ita E D ad
4. ſexti. 1 D H. ſed ut B A ad A G, ita rectangulum A B C ad rectangulum, quod A G, B C continetur: & ut E D ad D H, ita D E F re-
36. primi. ctangulum ad rectangulum contentum D H, E F. quare permutando ut rectangulum A B C ad rectangulum D E F, ita rectangulum, quod continetur A G, B C; hoc eſt parallelogrammum A C ad rectangulum contentum D H, E F, hoc eſt ad parallelogrammum D F.



LEM-

LEMMA VII.

SIT triangulum ABC: ſitque BC æquidiſtans DE; & quadratum, quod ſit ex CA, æquale ſit rectangulo FAE. Dico iam, ſi iungantur DC, BF, lineam BF ipſi DC æquidiſtantem eſſe.

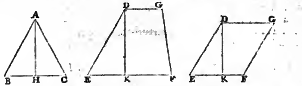


HOC verò manifeſtè patet. Quoniam enim ut FA ad AC, ita eſt CA ad AE; & ut CA 14. ſexti
ad AE, ita BA ad AD: erit ut FA ad AC, 4
ita BA ad AD. ergo DC, BF inter ſe æquidiſtantes ſunt. 2

LEMMA VIII.

SIT triangulum ABC, trapezium verò DEFG; ita ut ABC angulus angulo DEF ſit æqualis. Dico ut rectangulum ABC ad rectangulum, quod continetur utraque ipſarum DG, EF & DE, ſic eſſe triangulum ABC ad trapezium DEFG.

DVCANTVR enim perpendiculares AH, DK. Et quoniam angulus ABC æqualis eſt angulo DEF; & qui eſt ad H rectus æqualis recto ad K: erit ut BA 4. ſexti
ad AH, ita ED ad DK. ſed ut BA ab AH, ita rectangulum ABC ad id, quod 1
continetur AH, BC; & ut ED ad DK, ita rectangulum, quod continetur utra-



que DG, EF & DE ad contentum utraque DG, EF & DK. eſt autem trian- A
gulum ABC dimidium rectanguli contenti AH, BC: & trapezium DEFG B
dimidium eius, quod utraque DG, EF & DK continetur. ergo ut rectangulum ABC ad rectangulum contentum utraque DG, EF & DE, ita eſt triangulum ABC ad DEFG trapezium. Quod ſi ABC triangulum ſit, & DF parallelogrammum; eadem ratione fiet, ut ABC triangulum ad DF parallelogrammum, ita rectangulum ABC ad duplum rectanguli DEF.

EX quibus conſtat, rectangulum ABC, ſi quidem DF parallelogram- C
mum ſit, æquale eſſe duplo rectanguli DEF; ſi verò ſit trapezium, æquale ei, quod utraque DG, EF & ipſa DE continetur.

COMMENTARIVS.

EST autem triangulum ABC dimidium rectanguli contenti AH, BC, & tra- A
pezium DEFG dimidium eius, quod utraque DG, EF & DK continetur.] *Iuncta enim DF, erit triangulum EDF dimidium rectanguli contenti EF & DK: & triangulum DFG itidem dimidium eius, quod continetur DG & DK. ergo totũ*

trapezij DEFG dimidiũ eſt rectanguli, quod utraque E F, DG & ipſa DK continetur.

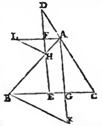
B Ergo ut rectangulum A B C ad rectangulum contentum utraque DG, E F & D E, ita eſt triangulum A B C ad D E F G trapezium.) *Ex ante dictis enim colligitur, ut rectangulum A B C ad rectangulum ex A H & B C, ita eſſe rectangulum ex D G, E F & D E ad rectangulum ex D G, E F & D K. quare permutando ut rectangulum A B C ad rectangulum ex D G, E F & DE, ita rectangulum ex A H & BC ad rectangulum ex D G, E F & D K; & ita eorum dimidia, hoc eſt triangulum A B C ad trapezium D E F G.*

C Ex quibus conſtat rectangulum A B C, ſiquidem D F parallelogrammum ſit &c.) *Sequitur hoc, quando triangulum A B C parallelogrammo, vel trapezio D E F G ſit æquale. quod etiam demonſtratur ab Eutocio in commentarijs in quadrageſimam nonã primi libri Apollonij. quare veriſimile eſt in Pappi verbis hoc loco nonnulla deſiderari.*

LEMMA IX.

SIT triangulum ABC; & producta C A ad D, ducatur, ut contingit, recta linea D H E: cui quidem æquidiſtans ducatur A G; ipſi verò B C æquidiſtans A F. Dico ut quadratum A G ad rectangulum B G C, ita eſſe rectangulum D F H ad quadratum F A.

A PONATVR rectangulo B G C æquale rectangulum A G K; & rectangulo
B D F H æquale rectangulum A F L: & iungantur B K, H L. Quoniam igitur angulus ad C æqualis eſt angulo B K G; & angulus D A L in circulo æqualis an-
C D gulo F H L: erit & angulus G K B angulo F H L æqualis. ergo ut B G ad G K, ita L F ad F H. eſt autem ut A G ad G B, ita H E ad E B: & ut H E ad E B, ita H F ad F A. ut igitur A G ad G B, ita H F ad F A. ſed ut B G ad G K, ita alia quæpiam linea L F ad antecedentem F H. quare ex æquali in perturbata ratione, ut A G ad G K, ita L F ad F A. ut verò A G ad G K, ita
lem. in 22. decimi. quadratum A G ad rectangulum A G K, hoc eſt ad rectangulum B G C: & ut L F ad F A, ita rectangulum L F A, hoc eſt D F H ad quadratum F A. ergo ut quadratum A G ad rectangulum B G C, ſic rectangulum D F H ad F A quadratum. Sed licet illud idem etiam per compoſitam proportionem demonſtrare. Quoniam enim proportio A G ad G B eſt eadem, quæ H E ad E B, hoc eſt H F ad F A; proportio autem A G ad G C eadẽ, quæ D E ad E C, hoc eſt D F ad F A: erit proportio compoſita ex proportione A G ad G B, & ex proportione A G ad G C, quæ quidem eſt quadrati A G ad rectangulum B G C, eadem quæ componitur ex proportione H F ad F A, & ex proportio-
E ne D F ad F A. hæc autem eſt proportio rectanguli D F H ad quadratum F A.



COMMENTARIVS.

A PONATVR rectangulo B G C æquale rectangulum A G K: & rectangulo D F H æquale rectangulum A F L.) *Deſiderantur ferè omnia hæc in Græco codice, quæ nos ſupplevimus: illud verò ita intelligendum eſt, ut producatur A G ad K; & fiat rectangulum A G K rectangulo B G C æquale; & rurſus producta A F ad L, fiat rectangulum A F L æquale rectangulo D F H.*

B Quoniam igitur angulus ad C æqualis eſt angulo B K G: & angulus D A L in circulo æqualis angulo F H L.) *Ex vigeſima prima tertij Elementorum: ſunt enim*

Digitized by Google

enim puncta A, B, K, C in circunferentia eiuſdem circuli; cùm rectangulum A G K æquale ſit rectangulo B G C, ex converſa trigeſima quinta eiuſdem: & eadem ratione puncta A, D, L, H cadent in circunferentia alterius circuli.

Erit & angulus G K B angulo F H L æqualis.] *Nanque angulus ad C angulo D A L eſt æqualis; quòd B C, F A æquidiſtantes ſint.* C 29. primi.

Ergo ut B G ad G K, ita L F ad F H.] *Sequitur enim ex iam dictis triangulum L F H triangulo B G K ſimile eſſe: quoniam angulus ad K angulo F H L eſt æqualis, ut demonſtratum fuit; & angulus L F H æqualis angulo L A G, hoc eſt ipſi B G K. ergo & reliquus reliquo æqualis erit.* D 29. primi.

Hæc autem eſt proportio rectanguli D F H ad quadratum F A.] *Ex quibus fit, ut rectangulum D F H ad quadratum F A eandem habeat proportionem, quam quadratum A G ad rectangulum B G C. quod quidem oportebat demonſtrare.* E

APOLLONII PERGÆI CONICORUM LIBER I.

CVM COMMENTARIIS EVTOCII ASCALONITÆ, ET FEDERICI COMMANDINI.

APOLLONIUS EUDEMO S. D.

SI & corpore vales, & aliæ res tuæ ex animi tui ſententia ſe habent, bene eſt: nos quidem ſatis bellè habemus. Quo tẽpore tecum Pergami fui, animadverti te cupidũ intelligendi conica, quæ à nobis conſcripta ſunt. Itaque miſi ad te primum librũ emendatum; reliquos deinceps miſſurus, cùm animo ero tranquilliori. non enim arbitror te oblitum, quod à me accepiſti; quid ſcilicet cauſæ fuerit, cur ego hæc ſcribere aggreſſus ſim, rogatus à Naucrate Geometra, quo tempore Alexandriã veniens apud nos fuit: & cur nos, cùm de illis octo libris egiſſemus, maiorem ſtatim in his diligentiam adhibuimus. Nam cùm ipſe Naucrates quã primũ eſſet navigaturus; nos ea non emẽdavimus: ſed quæcunque ſeſe nobis obtulerunt, conſcripſimus; utpote qui ea poſtremò eſſemus percurſuri. Quamobrẽ nunc tempus nacti, ut quæque emendamus, ita edimus. Et quoniã accidit nõnullos alios ex ijs, qui nobiſcũ fuerant, habuiſſe primũ & ſecundum librum, antequã emendaretur: noli mirari, ſi in quædam incidas, quæ aliter ſe habeant. Ex octo autẽ libris, quatuor primi huius diſciplinæ cõtinent Elementa: quorũ primus quidem cõplectitur generationes trium coni ſectionum, & earũ, quæ oppoſitæ dicuntur; itẽque principalia ipſarum accidentia à nobis & uberiùs & univerſaliùs, quàm ab alijs, qui de ea re ſcripſerũt, elaborata. Secundus liber tractat ea, quæ attinẽt ad diametros, & ad axes ſectionũ, & ad alias lineas, quæ cum ſectione non conveniũt, quæ à Græcis ἀσύμπτωτοι appellantur: tum de alijs diſſerit, quæ & generalẽ & neceſſariã utilitatẽ ad determinationes afferũt. quas autẽ vocẽ diametros & quos axes, ex hòc libro cognoſces.

Ter-

Digitized by Google

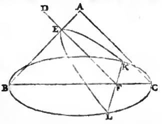
Tertius liber continet multa, & admirabilia theoremata, quæ utilia erunt, & ad ſolidorum locorum compoſitiones, & ad determinationes. quorum complura, & pulcherrima & nova ſunt. Hæc nos perpendentes, animadvertimus non poſitam eſſe ab Euclide rationem componendi loci ad tres, & quatuor lineas; verùm ipſius tantummodo particulam quandam: atque hanc non ſatis feliciter. non enim fieri poterat, ut ea compoſitio rectè perficeretur abſque ijs, quæ à nobis inventa ſunt. Quartus liber tradit, quot modis conorum ſectiones inter ſe ſe, & circuli circunferentiæ occurrere poſſint; & multa alia ad pleniorem doctrinam, quorum nihil ab ijs, qui ante nos fuerunt, memoriæ proditum eſt. coni ſectio, & circuli circunferentia, & oppoſitæ ſectiones ad quot puncta oppoſitis ſectionibus occurrant. Reliqui autem quatuor libri ad abundantiorem ſcientiã pertinent. Quintus enim de minimis, & maximis magna ex parte agit. Sextus de æqualibus, & ſimilibus coni ſectionibus. Septimus continet theoremata, quæ determinandi vim habent. Octavus problemata conica determinata. At verò omnibus his editis, licet unicuique, qui in ea legendo inciderit, ex animi ſui ſententia iudicare. Vale.

EUTOCII ASCALONITÆ IN PRIMUM LIBRUM CONICORVM APOLLONII EX PROPRIA EDITIONE COMMENTARIVS.

APOLLONIVS Geometra, Anthemi ſodalis chariſſime, natus eſt Pergæ, quæ Pamphiliæ civitas eſt, tempore Ptolemæi Evergetæ, ut tradit Heraclius in Archimedis vita. qui etiam ſcribit Archimedem quidem primum conica theoremata fuiſse aggreſſum; Apollonium verò cùm ea inveniſſet ab Archimede nondum edita, ſicut propria ſua edidiſſe. neque id verè, ut mea fert opinio. nam & Archimedes multis in locis veluti antiquioris conicorum inſtitutionis mentionem facere videtur: & Apollonius ea ſcribit, non ut à ſe ipſo inventa. non enim dixiſſet, uberius & univerſalius hæc à ſe, quàm ab alijs tractata fuiſſe. Sed quod ſcribit Geminus verum eſt. Antiqui, inquit, conum diffinientes, rectanguli trianguli circumvolutionem manente uno eorum, quæ circa rectum angulum ſunt, latere; & conos omnes rectos, & unam in ſingulis ſectionem fieri arbitrati ſunt: in rectangulo quidem cono vocatam parabolen; in obtuſiangulo hyperbolen; in acutiangulo autem ellipſim; atque ita nominatas apud ipſos ſectiones paſſim invenias. Quemadmodum igitur antiquis illis in unaquaque triangulorum ſpecie contemplantibus duos rectos, primum in æquilatero, deinde in æquicruri, poſtea in ſcaleno, ætate poſteriores univerſale theorema demonſtrarunt eiuſmodi.

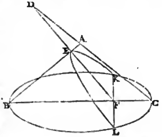
Omnis

Omnis trianguli interiores tres anguli duobus rectis ſunt æquales: *ita & in coni ſectionibus; rectanguli quidem coni ſectionem dictam, in rectangulo tantùm cono contemplati ſunt; ſecto ſcilicet plano ad unum coni latus recto: obtuſianguli autem coni ſectionem in cono obtuſiangulo factam demonſtrarunt, & acutianguli ſectionem in cono acutiangulo; ſimiliter in omnibus conis ducentes plana ad unum eorum latus recta. quod & antiqua ſectionum nomina indicant. Verùm poſtea Apollonius Pergaus univerſe inſpexit in omni cono, tam recto, quàm ſcaleno, omnes ſectiones ineſſe, iuxta plani ad conum differentem inclinationem. quamobrem illius temporis homines admirati mirificam conicorum theorematum demonſtrationem magnum Geometram ipſum appellarunt. Hac quidem Geminus ſcripta reliquit in ſexto mathematicarum preceptionum libro. Quod autem dicit manifeſtum faciemus in ſubiectis figuris. Sit enim per axem coni triangulum A B C: & à quovis puncto E ducatur ipſi A B ad angulos rectos linea D E F: & per D F immiſſum planum, rectum ad ipſam A B, conum ſecet. rectus eſt igitur uterque angulus A E D, A E F: rectanguloque exiſtente cono, & angulo B A C recto, ut in prima figura apparet, duobus rectis aquales erunt anguli B A C, A E F. quare aquidiſtans erit linea D E F ipſi A C: & fiet in ſuperficie coni ſectio parabole, ſic dicta ἀπὸ τοῦ παράλληλον εἶναι, hoc eſt ab eo, quòd linea D F, qua communis ſectio eſt plani ſecantis, & trianguli per axem, parallela ſit ipſi A C lateri trianguli.*



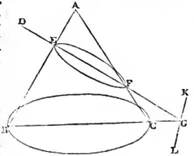
Parabole unde.

Sed ſi obtuſiangulus ſit conus, ut in ſecunda figura, obtuſo videlicet exiſtente angulo B A C, & angulo A E F recto, anguli B A C, A E F duobus rectis maiores erunt, & non conveniet D E F cum ipſo A C latere ad partes, in quibus eſt F: ſed ad eas in quibus ſunt A & E, producta nimirum C A in D. faciet igitur ſecans planum in ſuperficie coni ſectionem hyperbolen, dictam ἀπὸ τοῦ ὑπερβάλλειν, hoc eſt ab eo, quòd anguli B A C, A E F excedant duos rectos: vel quod D E F excedat verticem coni; & cum ipſa C A extra conveniat.



Hyperbole unde.

Quòd ſi acutiangulus ſit conus, hoc eſt acuto exiſtente angulo B A C, erunt anguli B A C, A E F minores duobus rectis; & linea E F, A C producta convenient tandem in aliqua parte: augereque, & in longius ducere conum poſſumus. erit igitur in ſuperficie ſectio, qua appellatur ellipſis διὰ τὸ ἐλλείπειν δυοῖν ὀρθαῖς τὰς προειρημένας γωνίας, hoc eſt ob id, quòd dicti anguli à duobus rectis deficiant: vel quòd ellipſis diminutus quidam circulus ſit. Ad hunc quidem modum antiqui ponentes ſecans planum per D E F ad rectos angulos ipſi A B lateri trianguli per axem coni, & inſuper differentes conos, & propriam in unoquoque ſectionem: at Apollonius ponens conum, & rectum & ſcalenum, differenti ipſius plani occurſu differentes efficit ſectiones. Sit enim, ut in iiſdem figuris, ſecans planum K E L; communis autem ſectio ipſius plani & coni baſis, linea K L: communis rurſus ſectio eiuſdem & trianguli A B C ſit ipſa E F, qua & diameter appella-



Ellipſis unde.

appellatur ſectionis. Itaque in omnibus ſectionibus ponit lineam K L ad rectos angulos eſſe ipſi baſi trianguli A B C. Verùm ſi E F æquidiſtans ſit A C, parabolen fieri K E L ſectionem in coni ſuperficie; ſi verò conveniat cum latere A C extra verticem coni, ut in D, fieri ipſam K E L ſectionē hyperbolen: quòd ſi conveniat intra, fieri ſectionem ellipſim, quam & θυρεὸν vocant. Generaliter igitur parabolæ diameter æquidiſtans eſt uni lateri trianguli: hyperbolæ autē, & ellipſis diameter cum eo convenit: hyperbolæ quidē ad partes verticis coni, ellipſis verò ad partes baſis. Scire præterea illud oportet parabolen, & hyperbolen ex eorū numero eſſe, quæ in infinitū augentur: at ellipſim non item, tota enim in ſe ipſā vergit, ſicuti circulus. Cum autem plures editiones ſint; ut etiam ipſe Apollonius in epiſtola ſcribit: optimū fore iudicavi ex multis, quæ occurrerūt, manifeſtiora colligere: in ipſius verbis quidem, ut legentibus ad hæc facilior pateret aditus: ſeorſum verò in commentarijs, ut par eſt, differentes demonſtrationis modos explicare. Itaque in epiſtola dicit, primos quatuor libros huius diſciplinæ elementa continere: quorum primus quidem complectitur generationes trium coni ſectionum & earum, quæ oppoſitæ dicuntur, itēque principalia ipſarum accidentia, hoc eſt quæcunque ipſis in prima generatione contingunt: habet enim & alia quædam conſequentia. ſecundus autem liber tractat ea, quæ attinent ad diametros, & ad axes ſectionum, & ad illas lineas, quæ cum ſectione non conveniunt, quæ à Græcis ἀσύμπτωτοι appellantur: tum de alijs differit, quæ & generalem, & neceſſariam utilitatem afferunt ad determinationes. determinatio autem duplex eſt, ut manifeſtè patet: altera quidem poſt expoſitionem, ſignificans quid ſit illud, quod quæritur: altera verò propoſitionem univerſalem eſſe prohibens, quæ declarat quando, & qua ratione, & quot modis, id quod propoſitum eſt, fieri poſſit, ut in vigeſimo ſecundo theoremate primi libri elementorum Euclidis. Ex tribus rectis lineis, quæ æquales ſint tribus alijs datis, triangulum conſtituere; oportet autem duas eiuſmodi lineas reliqua eſſe maiores, quomodocunque ſumantur: quippe cùm demonſtratum ſit omnis trianguli duo latera quomodocunque ſumpta reliquo maiora eſſe. *Tertius inquit Conicorum Liber continet multa, & admirabilia theoremata, quæ ad ſolidorum locorum compoſitiones utilia erunt. planos locos antiqui Geometræ appellare conſueverunt, quando non ab uno duntaxat puncto, ſed à pluribus problema efficitur. ut ſi quis proponat, Data recta linea terminata, invenire punctum, à quo ducta perpendicularis ad datam lineam, inter ipſius lineæ partes media proportionalis conſtituatur. locum eiuſmodi vocant Geometræ, quoniam non unum duntaxat eſt punctum, quod problema efficit, ſed locus totus, quem habet circunferentia circuli circa datam rectam lineam, veluti circa diametrum deſcripti. ſi enim in data recta linea ſemicirculus deſcribatur; quodcunque in circunferentia ſumpſeris punctum, & ab ipſo perpendicularem ad diametrum duxeris, quod propoſitum eſt, efficiet. Similiter autem data recta linea, ſi quis proponat invenire extra ipſam punctum, à quo lineæ ad eius extrema ductæ inter ſe æquales ſint: & in hoc non unum duntaxat eſt punctum, problema efficiens, ſed locus, quem continet linea, à puncto medio lineæ datæ ad rectos angulos ducta. nam ſi data linea bifariam ſecetur, & ab eo puncto linea ad rectos ducatur angulos, quodcunque in ipſa ſumpſeris punctum, faciet illud, quod proponebatur. Simile quiddam & ipſe Apollonius ἐν ἀναλυομένῳ τόπῳ ſcribit.*

Parabole quomodo fiat. Hyperbole. Ellipſis.

Parabole, & Hyperbole in infinitum augētur

ἀσύμπτωτοι.

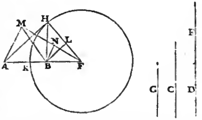
Determinatio duplex.

Loci plani.

Datis duabus rectis lineis in plano, punctiſque datis, & data proportione inæqualium linearum, poteſt in plano circulus deſcribi, ita ut lineæ, à datis punctis ad circunferentiam circuli inclinatæ, proportionem habeant eandem datæ proportioni.

Sint data puncta A, B; proportio autem data, quam habet C ad D: ſitque C maior; & oporteat facere illud, quod propoſitum eſt. iungatur A B; & ad partes B producatur: & fiat ut D ad C, ita C ad aliam lineam, quæ maior erit, quàm D; ſit autem E D. rurſus fiat ut E ad A B, ita D ad B F, & C ad G. patet igitur lineam

A lineam C proportionalem eſſe inter D & E D: itẽque G proportionalem inter
A F, F B. quare ſi ex centro F, & intervallo G circulus K H deſcribatur: circun-
ferentia K H lineam A B ſecabit. Sumatur in circunferentia quodvis punctum H:
& iungatur H A, H B, H F; erit H F ipſi G æqualis: & propterea ut A F ad F H,
6. ſexti. ita H F ad F B. Sunt autem circa eundem angulum H F B latera proportionalia.
ergo triangulum A F H ſimile eſt triangulo H F B: & angulus F H B angulo H A B
æqualis. ducatur per B ipſi A H æ-
cor. 20. ſexti. quidiſtans B L. & quoniam ut A F
ad F H, ita eſt H F ad F B; erit pri-
ma AF ad tertiam F B, ut quadratum
4. ſexti. A F ad F H quadratum. ſed ut A F
ad F B, ita A H ad B L, ergo ut qua-
dratum A F ad quadratum F H, ita
A H ad B L. Rurſus quoniam angu-
lus B H F æqualis eſt angulo H A B:
& angulus A H B angulo H B L æ-
29. primi. qualis; coalterni enim ſunt: & reli-
quus reliquo æqualis erit: & triangu-
4. ſexti. lum A H B ſimile triangulo B H L. quare latera, quæ circum æquales angulos,
proportionalia ſunt, videlicet ut A H ad H B, ita H B ad B L: & ut quadratum
A H ad quadratum H B, ita A H ad B L. erat autem ut A H ad B L, ita qua-
dratum A F ad quadratum F H. ut igitur quadratum A F ad quadratum F H, ita
22. ſexti. quadratum A H ad quadratum H B. & idcirco ut A F ad F H, ita A H ad H B.
B sed ut A F ad F H, ita E D, ad C, & C ad D. ergo ut C ad D, ita A H ad H B.
Similiter oſtendemus omnes alias lineas, quæ à punctis A, B ad circunferentiam cir-
culi inclinantur, eandem proportionem habere, quam habet C ad D. itaque dico, ſi
à punctis A, B ducantur lineæ ad aliud, quod non ſit in circunferentia circuli; ipſa-
rum non eandem eſſe proportionem, quæ eſt C ad D. nam ſi eſſe poteſt, factum iam
illud ſit ad punctum M, quod extra circunferentiam ſumatur [eo enim intra ſum-
pto, idem abſurdum ſequetur] & iunctis M A, M B, M F, ut eſt C ad D, ita pona-
C tur A M ad M B. ergo ut E D ad D, ita quadratum E D ad quadratum C; & qua-
D dratum A M ad quadratum M B. ut autem E D ad D, ita poſita eſt A F ad F B.
quare ut A F ad F B, ita quadratum A M ad quadratum M B: & ex ijs, quæ proxi-
E mè dicta ſunt, ſi à puncto B ducatur linea ipſi A M æquidiſtans; ut A F ad F B, ita
demonſtrabitur quadratum A F ad F M quadratum. Sed demonſtratum eſt, ut A F
9. quinti. ad F B, ita quadratum A F ad quadratum F H. ergo linea F H ipſi F M eſt æqua-
lis. quod fieri non poteſt.



Loci ſolidi. *Loci igitur plani eiuſmodi ſunt. ſolidi verò loci appellantur ex eo, quòd lineæ, per quas ipſorum problemata efficiuntur, à ſolidorum ſectione generationem habent, quales ſunt coni ſectiones, & complures aliæ. Sunt etiam alij loci ad ſuperficiem dicti, quibus ex eorum proprietate nomen impoſitum eſt. Invehitur deinde Apollonius in Euclidem, non, ut Pappus, & alij nonnulli arbitrantur, quòd duas medias proportionales non invenerit: ſiquidem Euclides rectè invenit unam mediam proportionalem, non infeliciter, ut ipſe inquit: duas verò proportionales medias neque omnino in elementis inveſtigare aggreſſus eſt, & Apollonius de duabus medijs proportionalibus in tertio libro nihil inquirere videtur. Sed veriſimile eſt Euclidem in alio libro de locis conſcripſiſſe, qui ad manus noſtras non pervenerit. Quæ verò deinceps ſubiungit de quarto libro perſpicua ſunt. Quintus, inquit, liber de minimis & maximis magna ex parte agit. Quemadmodum enim in elementis didicimus, ſi ab aliquo puncto in circulum lineæ ducantur, earum quidem, quæ ad concavam ipſius circũferentiam pertinent, maximam eſſe, quæ per centrum tranſit; earum verò, quæ ad convexam, minimam eſſe, quæ inter dictum punctum, & diametrum interijcitur: ita & de coni ſectionibus in quinto libro inquirit.*

Sexti,

Sexti, ſeptimi, & octavi libri propoſitum manifeſtè ab ipſo Apollonio explicatur. & hac de epiſtola dicta ſint.

FED. COMMANDINI IN PROBLEMA APOLLONII COMMENTARIVS.

Itēque G proportionalem inter A F, F B.) *Quoniam enim vt D ad B F, ita eſt C ad G: erit permutando vt D ad C, ita B F ad G. rurſus quoniam ut E ad A B, ita D ad B F: ex 12. quinti, E D ad A F erit, vt D ad B F. ſed vt D ad B F, ita C ad G. ergo E D ad A F, erit vt C ad G; & permutando E D ad C, vt A F ad G; convertendoque C ad D E, vt G ad A F. erat autem D ad C, vt B F ad G: & vt D ad C, ita C ad D E. quare vt B F ad G, ita G ad A F: & propterea G media proportionalis eſt inter A F, F B. quod demonſtrare oportebat.* A

Sed ut A F ad F H, ita E D ad C.) *Proximè enim oſtendimus E D ad C ita eſſe, vt A F ad G, hoc eſt ad F H ipſi G æqualem.* B

Ergo ut E D ad D, ita quadratum E D ad quadratum C, & quadratum A M ad quadratum M B.) *Nam vt E D ad C, ita eſt C ad D; & vt C ad D, ita poſita eſt A M ad M B. quare vt E D ad C, ita A M ad M B: & ideo vt quadratum E D ad quadratum C, ita quadratum A M ad quadratum M B. vt igitur E D ad D, ita eſt quadratum E D ad quadratum C, & quadratum A M ad quadratum M B.* C 22. ſexti. 20. ſexti.

Vt autem E D ad D, ita poſita eſt A F ad F B.] *Superius nāque demonſtratum eſt, vt E D ad A F, ita eſſe D ad B F. quare & permutando vt E D ad D, ita A F ad F B.* D

Et ex ijs quæ proximè dicta ſunt, ſi à puncto B ducatur linea ipſi A M æquidiſtans: ut A F ad F B, ita demonſtrabitur quadratum A F ad F M quadratum.] *Ducatur per B ad M F linea B N, quæ ipſi A M æquidiſtet: erit ob ſimilitudinem triangulorum A M F, B N F, vt A F ad F B, ita A M ad B N. Itaque quoniam vt A F ad F B, ſic eſt quadratum A M ad quadratum M B; & ſic quadratum A F ad quadratum F H: erit quadratum A M ad quadratum M B, vt quadratum A F ad F H quadratum; & propterea linea A M ad M B, vt A F ad F H; convertendoque M B ad A M, vt F H ad A F. erat autem A M ad B N, vt A F ad F B. quare ex æquali M B ad B N, vt H F ad F B. ſed eſt A M ad M B, vt A F ad F H; & ut A F ad F H, ita H F ad F B. ergo vt A M ad M B, ita M B ad B N. Quoniam igitur circa æquales angulos A M B, M B N latera proportionalia ſunt: erit triangulum A M B ſimile triangulo M N B; & angulus B A M æqualis angulo N M B. ſed triangulorum A M F, M B F angulus F A M eſt æqualis angulo F M B; & angulus ad F utrique communis. ergo & reliquus reliquo æqualis, & triangulum triangulo ſimile erit. quare ut A F ad F M, ita eſt F M ad F B. vt igitur prima A F ad F B tertiam, ita quadratum A F ad F M quadratum.* E 4. ſexti. 22. ſexti. 29. primi. 6. ſexti. 4. ſexti; cor. 20. ſexti.

DIFFINITIONES PRIMÆ.

1 SI ab aliquo puncto ad circunferentiam circuli, qui non ſit in eodem plano, in quo punctum, coniuncta recta linea in utranque partem producatur; & manēte puncto convertatur circa circuli circunferentiam, quouſque ad eum locum redeat, à quo cœpit moveri: ſuperficiem à recta linea deſcriptam, conſtantéque ex duabus ſuperficiebus, ad verticem inter ſeſe aptatis, quarum utraque in infinitum augetur, nimirum recta linea, quæ eam deſcribit, in infini- A

tum producta, voco conicam ſuperficiem. 2 Uerticem ipſius, manens pũctum. 3 Axem, rectam lineam, quæ per punctum, & centrum circuli ducitur. 4 Conum autem voco, figuram contentam circulo, & conica ſuperficie, quæ inter verticem, & circuli circunferentiam interijcitur. 5 Uerticem coni, punctum, quod & ſuperficiei conicæ vertex eſt. 6 Axem, rectam lineam, quæ à vertice ad circuli centrum perducitur. 7 Baſim, circulum ipſum. 8 Conorum rectos quidem voco, qui axes habent ad rectos angulos ipſis baſibus. 9 Scalenos verò, qui non ad rectos angulos ipſis
B baſibus axes habent. 10 Omnis curvæ lineæ, in uno plano exiſtentis, diametrum voco rectam lineam, quæ quidem ducta à linea curva, omnes lineas, quæ in ipſa ducuntur, cuidam lineæ æquidiſtantes bifariam dividit. 11 Uerticem, lineæ terminum rectæ, qui eſt in
C ipſa linea. 12 Ordinatim ad diametrum applicari dicitur, unaquæque linearum æquidiſtantium. 13 Similiter & duarum curvarum linearum, in uno plano exiſtentium, diametrum quidem tranſverſam voco, rectam lineam, quæ omnes in utraque ipſarum ductas, lineæ cuidam æquidiſtantes bifariam dividit. 14 Uertices linearum, diametri terminos, qui ſunt in ipſis lineis. 15 Rectam verò diametrum voco, quæ inter duas lineas poſita, lineas omnes ductas, rectæ cuidam æquidiſtantes, & inter ipſas interiectas, bifariam ſecat. 16 Coniugatas diametros voco curvæ lineæ, & duarum curvarum, rectas lineas, quarum utraque diameter eſt, & lineas alteri æquidiſtantes bifariam dividit. 17 Axem verò curvæ lineæ, & duarum curvarum, rectam lineam, quæ cùm ſit diameter curvæ lineæ, vel duarum curvarum, æquidiſtantes ad rectos ſecat angulos. 18 Axes coniugatos curvæ lineæ, & duarum curvarum, rectas lineas, quæ cùm ſint diametri coniugatæ, ipſis æquidiſtantes ad rectos angulos ſecant.

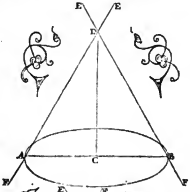
E V T O C I V S.

Aggreſſus ad diffinitiones Apollonius tradit generationem conicæ ſuperficiei, non diffinitionem, quæ, quid res ſit, declarat: quanquam licebit vtique ijs, qui volent, & ex generatione ipſa diffinitionem colligere, at verò nos ijs, quæ ab Apollonio dicuntur, ex figuris lucem afferemus.

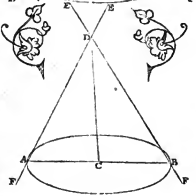
A Si ab aliquo puncto ad circunferentiam circuli, &c.

Sit circulus A B, cuius centrum C; & punctum aliquod ſublime D: iunctaque D B in infi-

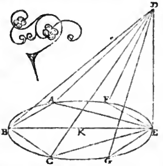
infinitum ex utraque parte producatur ad puncta E, F. Si igitur recta linea D B feratur eò uſque in circuli A B circunferentia, quouſque punctum B rurſus in eum locum reſtituatur, à quo cœpit moveri: deſcribet ſuperficiem quandam, quæ quidem conſtat ex duabus ſuperficiebus, ad D punctum ſeſe tangentibus. eam voco conicam ſuperficiem; quæ & augetur in infinitum, cùm recta linea D B, ipſam deſcribent, in infinitum producitur. verticem ſuperficiei dicit punctum D: axem rectam D C: conum verò appellat figuram contentam circulo A B, & ea ſuperficie, quam D B ſola deſcribit: coni verticem punctum D: axem D C: & baſim, A B circulum. At ſi D C ad circulum fuerit perpendicularis, rectum vocat conum; ſin minùs, ſcalenum.



Deſcribetur autem conus ſcalenus, quando à centro circuli linea erigatur, quæ non ſit perpendicularis ad circuli planum: à puncto verò lineæ, quod eſt in ſublimi, ad circuli circunferentiam recta linea ducatur: & manente puncto circa ipſam cõvertatur: comprehenſa enim figura conus erit ſcalenus. conſtat igitur lineam circunductam in converſione quandoque maiorem, quandoque minorem, & quandoque æqualem fieri ad aliud, atque aliud circuli punctum. quod tamen nos hoc modo demonſtrabimus.

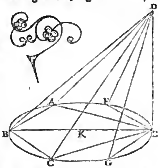


Si à vertice coni ſcaleni ad baſim rectæ lineæ ducantur; earum omnium vna minima, & vna maxima erit, duæ verò tantùm ex utraque parte minimæ & maximæ inter ſe æquales. At quæ propinquior eſt minimæ ſemper minor erit, quàm quæ ab ipſa magis diſtat.

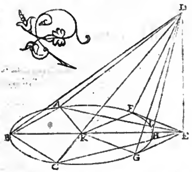


Sit conus ſcalenus, cuius baſis A B C circulus, vertex autem punctum D. & quoniam linea, quæ à vertice coni ſcaleni ad ſubiectum planum perpendicularis ducitur, vel in circunferentiam circuli A B C cadit, vel extra, vel intra. cadat primum in ipſam circunferentiam, vt in prima figura apparet, quæ ſit D E; ſumptoque circuli centro K, ab ipſo E ad K ducatur linea E K, & producatur ad B. iungatur autem B D: & ex vtraque parte puncti E ſumantur duæ circunferentiæ æquales F E, E G; itemque ex vtraque parte B ſumantur aliæ duæ æquales A B, B C; & iungantur F E, E G, D F, D G, A E, E C, A B, B C, D A, D C. Quoniam igitur recta linea 39. tertij. *E F æqualis eſt ipſi E G: æquales enim circunferentias ſubtendunt; communis autem, & ad rectos angulos D E: erit baſis D F baſi D G* 4. primi. *æqualis. rurſus quoniam circunferentia A B æqualis eſt ipſi B C circunferentiæ, & eſt*

B E diameter circuli : reliqua E F A reliqua E G G aqualis erit . quare & recta linea
A E ipſi E C . ſed D E communis eſt utrique, & ad rectos angulos. baſis igitur A D aqua-
lis eſt baſi D C. Similiter autem demonſtrabuntur in-
ter ſe aquales, quacunque ab ipſa D E, vel D B aqua-
liter diſtant. Rurſus quoniam triangulum eſt E D F,
4. primi. & angulus D E F rectus; linea D F maior erit, quàm
D E . & quoniam recta linea A E maior eſt , quàm
recta E F, quòd & circunferentia E F A maior, quàm
ipſa E F circunferentia ; communis verò, & ad rectos
47. primi. angulos D E : baſis D F minor erit, quàm D A. ea-
dem quoque ratione & D A minor , quàm D B .
Quòd cùm oſtenſa ſit D E minor, quàm D F ; itēque
D F minor, quàm D A, & D A minor, quàm D B:
ſequitur ipſam D E minimam eſſe; D B verò maxi-
mam ; & qua propinquior eſt ipſi D E ſemper mino-
rem eſſe , quàm qua ab ipſa magis diſtat . Sed cadat



perpendicularis D E extra circulum A B C G F , ut in ſecunda figura : & rurſus ſuma-
tur circuli centrum K ; iunctaque E H K producatur ad B; & iungantur D B, D H. ſu-
mantur praterea dua circunferentia aquales ex utraque parte puncti H, qua ſint F H,
H G; & ex utraque parte ipſius B alia dua ſumantur A B, B C. poſtremò iungantur E F,
E G , F K , K G , D F , D G , A B , B C , A K , K C , D A, D C. Itaque quo-
27. tertij. niam aqualis eſt circunferentia H F ipſi H G : & angulus H K F angulo H K G aqua-
lis erit . ſed recta linea F K recta K G eſt aqualis , ex centro enim ad circunferentiam
8. primi. ducuntur , & communis K E . ergo baſis F E aqualis baſi G E . eſt autem communis,
& ad rectos angulos D E . baſis igitur D F baſi D G eſt aqualis . Rurſus quoniam cir-
cunferentia B A aqualis eſt circunferentia B C : & angulus A K B ipſi C K B , & re-
13. primi. liquus ex duobus rectis A K E reliquo C K E
aqualis erit . linea autem A K , K C inter
ſe aquales , ex centro enim ſunt , & commu-
nis ipſa K E . ergo & A E baſis aqualis baſi
C E. rurſus cùm ſit D E communis , & ad re-
ctos angulos: & D A baſis erit baſi D C aqua-
lis . ſimiliter & alia omnes ad invicem aqua-
les demonſtrabuntur , qua ab ipſa D B , vel
D H aqualiter diſtiterint . & quoniam E H
8. tertij. minor eſt , quàm E F ; communis verò , & ad
rectos angulos E D : erit baſis D H baſi D F
minor . Rurſus quoniam linea , qua à puncto
E ducta contingit circulum , maior eſt omni-
bus, qua ab eodem puncto in convexam circun-
36. tertij. ferentiam cadunt ; & rectangulum A E L



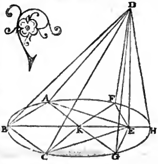
aquale eſt quadrato ipſius E F, quando E F circulum contingit , ut oſtenſum eſt in ter-
14. ſexti. 8. tertij. tio libro elementorum : erit ut A E ad E F , ita E F ad E L . eſt autem E F maior ,
quàm E L , ſemper enim propinquior minima minor eſt ea , qua plus diſtat . quare &
14. quinti. A E maior , quàm E F. ſed communis , & ad rectos angulos eſt E D . baſis igitur D F
minor eſt baſi D A. Rurſus cùm ſit A K aqualis ipſi K B, & communis K E : erunt dua
20. primi. linea A K , K E duabus E K, K B , hoc eſt toti E B aquales . ſed dua A K, K E maio-
res ſunt , quàm E A . ergo & B E maior, quàm A E. communis autem D E , & ad re-
ctos angulos . quare baſis D A minor eſt baſi D B . Itaque cùm D H minor ſit , quàm
D F ; & D F minor , quàm D A ; & D A, quàm D B: minima erit D H ; D B ve-
rò maxima ; & ipſi D H propinquior ſemper minor erit , quàm qua magis diſtat .

Poſtremò cadat perpendicularis D E intra circulum A B C G F , ut in tertia figura ,
ſum-

ſumptoque circuli centro K, & iuncta E K producatur in utrãque partem ad puncta B, H, & iungantur D H, D B. ſumantur autem ex utraque parte puncti H circunferentiæ æquales F H, H G: & ex utraque parte B ſumantur A B, B C. denique iungantur E F, E G, F K, K G, D F, D G, K A, K C, E A, E C, D A, D C, A B, B C. Quoniam igitur H F circunferentia æqualis eſt circunferentiæ H G; & angulus H K F angulo H K G eſt æqualis: linea verò K F æqualis ipſi K G; & K E communis. ergo & F E baſis baſi G E æqualis erit. ſed eſt D E communis; & angulus F E D rectus æqualis recto G E D. quare & baſis D F baſi D G æqualis. Rurſus cum circunferentia A B æqualis ſit circunferentiæ B C: angulus A K B angulo C K B æqualis erit. ergo & reliquus ex duobus rectis A K E reliquo C K E. eſt autem linea A K æqualis K C, & communis K E. baſis igitur A E baſi C E æqualis. ſed cùm D E communis ſit; & angulus A E D æqualis angulo C E D, quòd uterque rectus: erit & baſis D A baſi D C æqualis. Eodem modo & omnes, quæ æqualiter diſtant ab ipſa D B, vel D H, inter ſe æquales demonſtrabuntur. Itaque quoniam in circuli A B C diametro ſumitur punctum E, quod non eſt centrum circuli: erit E B maxima, E H verò minima; & ſemper ipſi E H propinquior minor ea, quæ diſtantior fuerit. quare E H minor, quàm E F. at E D communis eſt, & ad rectos angulos. baſis igitur D H minor baſi D F. Rurſus cùm E F minor ſit, quàm E A, communiſque, & ad rectos angulos E D: baſis D F baſi D A minor erit. & eadem ratione baſis D A minor, quàm D B oſtendetur. Quoniam igitur minor eſt D H, quàm D F; & D F quàm D A; & D A quàm D B: minima erit D H, & D B maxima: & propinquior ipſi D H ſemper minor ea, quæ magis diſtat.

27. tertij.

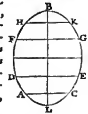
4. primi.

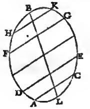


7. tertij.

Omnis curvæ lineæ, in uno plano exiſtentis, diametrum voco rectam lineam, &c. B

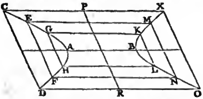
In uno plano dixit propter helicam cylindri & ſphæræ. hæ enim non ſunt in uno plano. Quod autem dicit, eiuſmodi eſt. Sit curva linea A B C, & in ea æquidiſtantes A C, D E, F G, H K: à puncto autem B ducatur B L recta linea, quæ ipſas æquidiſtantes bifariam ſecet. linea igitur A B C diametrum, inquit, voco rectam lineam B L; & verticem punctum B: ordinatim verò ad ipſam B L applicari dicitur unaquæque linearum A C, D E, F G, H K. Quòd ſi B L æquidiſtantes bifariam, & ad rectos angulos ſecet, axis appellatur.

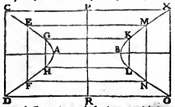




Similiter & duarum curvarum linearum, &c. C

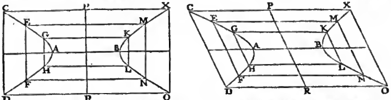
Si enim intellexerimus lineas A B, & in ipſis æquidiſtantes C D, E F, G H, K L,





M N, X O; & diametrum A B ex utraque parte productam, quæ bifariam æquidiſtantes

tes dividat : ipſam quidem A B voco diametrum tranſverſam ; vertices linearum puncta A, B; ordinatim verò ad A B diametrum applicari dicuntur C D, E F, G H, K L, M N, X O. At ſi bifariam, & ad rectos angulos dividat, tranſverſus axis appellabitur. Si verò recta linea, ut P R ducta lineas C X, E M, G K, H L, F N, D O, ipſi A B æqui-

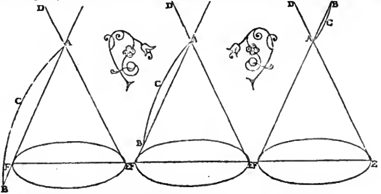


diſtantes bifariam ſecet, recta diameter dicitur. Ordinatim ad P R diametrum applicatur unaquaque linearum C X, E M, G K, H L, F N, D O. ſi bifariam, & ad rectos angulos ſecet, rectus axis dicetur. At verò ſi rectæ lineæ A B, P R ipſis æquidiſtantes bifariam ſecuerint, coniugata diametri. Quòd ſi bifariam, & ad rectos angulos, coniugati axes vocabuntur.

THEOREMA I. PROPOSITIO I.

Rectæ lineæ, quæ à vertice ſuperficiei conicæ ad puncta, quæ in ſuperficie ſunt, ducuntur; in ipſa ſuperficie erunt.

Sit ſuperficies conica, cuius vertex A; & ſumpto in ea aliquo puncto B, iungatur recta linea A C B. Dico A C B in ſuperficie eſſe. Si enim fieri poteſt, non ſit in ſuperficie; & recta linea, quæ ſuperficiem deſcribit, ſit D E; circulus autem, in quo ipſa D E fertur, ſit E F. Itaque ſi manente A feratur D E in E F cir-



culi circunferentia, per B punctum tranſibit: atque erunt duarum linearum iidem termini; quod eſt abſurdum. non igitur à puncto A ad B ducta linea extra ſuperficiem eſt. ergo in ipſa ſuperficie erit.

Ex quibus conſtat, ſi à vertice ad aliquod punctum eorum, quæ intra ſuperficiem ſunt, recta linea ducatur, intra: & ſi ad aliquod eorum, quæ ſunt extra, extra ſuperficiem cadere.

EVTO-

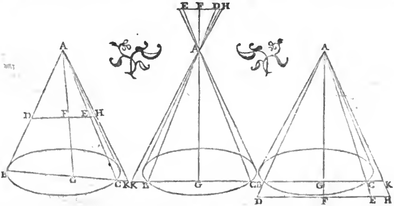
EVTOCIVS.

DE figuris differentibus, vel caſibus theorematum illud ſcire oportet, caſum eſſe, quando ea, quæ in propoſitione dantur, poſitione data ſint. ipſorum enim differens tranſmutatio, eadem concluſione manente, caſum facit. ſimiliter autem & à conſtructione tranſpoſita fit caſus. cùm igitur theoremata plures caſus habeant, una eademque demonſtratio omnibus congruit, & iiſdem elementis: præter quàm in paucis quibuſdam, ut deinceps explicabimus. Statim nanque primum theorema tres habet caſus, propterea quòd punctum B interdum quidem in ſuperficie inferiori ſumitur, & hoc duobus modis, vel ſupra circulum, vel infra; interdum verò in ea, quæ eſt ad verticem. primum igitur theorema oſtendere proponit, non qualibet duo puncta coniungentem rectam lineam in ſuperficie eſſe, niſi quæ ad verticem ipſum pertineat. cuius cauſa eſt, quòd conica ſuperficies efficitur à recta linea, quæ manentem terminum ad verticem habet. Illud verò planè ita eſſe, in ſecundo theoremate demonſtratur.

THEOREMA II. PROPOSITIO II.

SI in alterutra ſuperficierum, quæ ſunt ad verticem, duo puncta ſumantur; & quæ puncta coniũgit recta linea ad verticem non pertineat, intra ſuperficiẽ cadet; quæ verò eſt in directũ ipſi, cadet extra.

Sit conica ſuperficies, cuius vertex quidem A; circulus autem, in quo fertur linea ſuperficiem deſcribens, ſit B C: & in alterutra ſuperficierum, quæ ſunt ad verticem, ſumptis duobus punctis D, E, linea D E ducatur, quæ ad punctum A non pertineat. Dico ipſam D E intra ſuperficiem cadere; & quæ eſt in directum ipſi, cadere extra. iungantur A D, A E, & producantur. cadent utique in circuli circumferentiam. cadant in puncta B, C; & iungatur B C: erit igitur B C in- 1. huius. 2. tertij.



tra circulum. quare & intra conicam ſuperficiem. ſumatur in ipſa D E quodvis punctum F; iunctaque A F producatur; cadet in lineam B C. nam triangulum B C A in uno plano exiſtit. itaque cadat in G. Quoniam igitur punctum G eſt intra conicam ſuperficiem: & ipſa A G, & punctum F intra conicam ſuperficiem erit. ſimiliter autem demonſtrabitur & omnia alia puncta lineæ D E eſſe intra conicam ſuperficiem. ergo & ipſa D E intra eandem cadet. Producatur D E ad H, 2. undecimi.

Dico

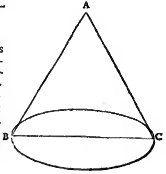
Dico lineam E H extra conicam ſuperficiem eſſe. ſi enim fieri poteſt, aliquod ipſius punctum H non ſit extra, & iuncta A H producatur; cadet in ipſam circuli circunferentiam, vel intra; quod fieri non poteſt. cadit enim in lineam B C protractam, ut in K. quare E H extra conicam ſuperficiem erit. linea igitur D E cadet intra conicam ſuperficiem: & quæ eſt in directum ipſi, extra cadet.

EVTOCIVS.

SECVNDVM theorema tres habet caſus; propterea quòd puncta D, E ſumuntur quandoque in ſuperficie ſecundùm verticem, quandoque in inferiori: & id dupliciter, vel intra circulum, vel extra. Sciendum autem eſt, in quibuſdam exemplaribus totum hoc theorema per argumentationem, quæ deducit ad id, quod fieri non poteſt, demonſtrari.

THEOREMA III. PROPOSITIO III.

SI conus plano per verticem ſecetur, ſectio triangulum erit.



Sit conus, cuius vertex A; baſis autem circulus B C: & per A ſecetur plano aliquo, quod ſectiones faciat in ſuperficie A B, A C lineas; & in baſi lineam B C. Dico A B C triangulum eſſe. Quoniam enim à puncto A ad B ducta linea communis ſectio eſt plani ſecantis, & ſuperficiei conicæ: erit A B recta linea. Eadem ratione & ipſa A C. eſt autem & B C recta. quare triangulum eſt A B C. ſi igitur conus plano ſecetur per verticem, ſectio triangulum erit.

EVTOCIVS.

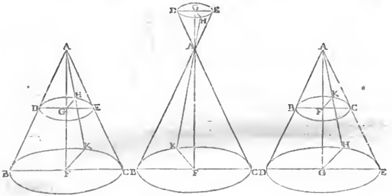
TERTIVM theorema caſum non habet. oportet autem ſcire lineam A B rectam eſſe, cùm ſit communis ſectio plani ſecantis, & ſuperficiei conicæ, quæ à recta linea, manentem terminum ad verticem habente, deſcribitur. neque enim omnis ſuperficies ſecta plano ſectionem facit rectam lineam: neque ipſe conus, niſi planum ſecans per verticem tranſeat.

THEOREMA IIII. PROPOSITIO IIII.

SI alterutra ſuperficierum, quæ ſunt ad verticem, plano ſecetur æquidiſtante circulo, per quem fertur recta linea ſuperficiem deſcribens, planum, quod ſuperficie concluditur, circulus erit, centrum in axe habens: figura verò contenta circulo, & ea parte ſuperficiei conicæ, quæ inter ſecans planum & verticem interijcitur, conus erit.

SIT conica ſuperficies, cuius vertex A; circulus autem, in quo fertur recta linea ſuperficiem deſcribens, B C: & ſecetur plano ipſi circulo B C æquidiſtante, quod ſectionem faciat in ſuperficie lineam D E. Dico D E circulum eſſe, qui cen-

centrum in axe habet. Sumatur enim centrum circuli B C, quod ſit F; & A F iungatur. axis igitur eſt A F; & occurrit plano ſecanti. occurrat in G; & per A F planum ducatur: erit ſectio triangulum A B C. Itaque quoniam puncta D G E ſunt & in plano ſecante, & in ipſo A B C plano: recta linea erit D G E. ſumatur autem in ipſa D E punctum aliquod H; & iuncta A H producatur, quæ circunferentiæ B C occurrat in K; iunganturque G H, F K. & quoniam duo plana 6. diff. huius. 3. huius. 3. undecimi.



D E, B C æquidiſtantia à plano A B C ſecantur; communes ipſorum ſectiones æquidiſtantes erunt. æquidiſtat igitur linea D E ipſi B C; & eadem ratione G H ipſi F K. quare ut F A ad A G, ita F B ad D G; F C ad G E; & F K ad G H. ſuntque tres lineæ B F, F K, F C æquales inter ſeſe. ergo & ipſæ tres D G, G H, G E inter ſeſe æquales erunt. ſimiliter quoque oſtendentur æquales quæcunque à puncto G ad lineam D E ducuntur. circulus igitur eſt linea D E, centrum in axe habens. 16. undecimi. 4. ſexti.

Conſtat præterea figuram contentam circulo D E, & ea parte ſuperficiei conicæ, quæ inter dictum circulum, & punctum A interijcitur, conum eſſe: ſimulque demonſtratum eſt communem ſectionem plani ſecantis, & trianguli per axem diametrum eſſe ipſius circuli.

E V T O C I V S.

CASVS huius theorematis tres ſunt, quemadmodum & præcedentis, & ſecundi.

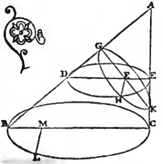
THEOREMA V. PROPOSITIO V.

SI conus ſcalenus plano per axem ſecetur ad rectos angulos ipſi baſi; ſeceturque altero plano ad triangulum per axem recto, quod ex verticis parte triangulum abſcindat ſimile ei, quod per axem, ſubcontrariè verò poſitum: ſectio circulus erit. vocetur autem huiuſmodi ſectio ſubcontraria.

Sit

BIBLIOTECA NAZ. ROMA VITTORIO EMANUELE

A Sit conus ſcalenus, cuius vertex A punctum; baſis circulus B C: & ſecetur pla-
B no per axem, ad circulum B C recto, quod faciat ſectionem triangulum A B C. ſecetur autem & altero plano ad rectos angulos ipſi A B C, quod ex parte A triangulum abſcindat A G K triangulo A B C ſimile, ſubcontrariè verò poſitum; ut videlicet angulus A K G æqualis ſit A B C angulo: & faciat ſectionem in ſuperficie lineam G H K. Dico ipſam G H K circulum eſſe. Sumantur enim in lineis G H K, B C puncta quæpiam H, L: à quibus ad planum, quod per triangulum A B C tranſit,
38. unde. perpendiculares ducantur, cadent hæ in communes planorum ſectiones. eadant ut H F,
6. undec. L M. æquidiſtans eſt igitur H F ipſi L M. ducatur autem per F ipſi B C æquidiſtans D F E.
15. unde. 4. huius. ergo planum, quod per F H, D E tranſit, æquidiſtans eſt baſi ipſius coni: & iccirco ſectio D H E circulus erit, cuius diameter D E. æ-
8. & 17. ſexti. quale eſt igitur rectangulum D F E quadrato F H. Quod cùm æquidiſtet D E ipſi B C, angulus A D E æqualis eſt angulo A B C. & po-
29. primi. nitur angulus A K G angulo A B C æqualis. ergo & A K G ipſi A D E æqualis erit. ſunt
15. primi. autem & qui ad F anguli æquales, quòd ſint ad verticem. quare D F G triangulum ſimile
4. ſexti. eſt triangulo K F E. & ut E F ad F K, ita G F ad F D. rectangulum igitur E F D
16. ſexti. æquale eſt rectangulo K F G. ſed rectangulum E F D demonſtratum eſt æquale
C quadrato F H. ergo & K F G eidem æquale erit. ſimili quoque ratione demonſtrabuntur & omnes, quæ à linea G H K ad ipſam G K perpendiculares ducun-
1. lemm. Pappi. tur, poſſe æquale ei, quod partibus ipſius G K continetur. ſectio igitur circulus eſt, cuius diameter G K.

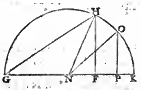


D EVTOCIVS.

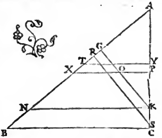
Quintum theorema caſum non habet. exordiens autem Apollonius expoſitionem,
A Secetur, *inquit*, conus per axem plano ad baſim recto. *Sed quoniam in cono ſcaleno iuxta unam duntaxat poſitionem triangulum per axem ad baſim rectum eſt: hoc ita faciemus. ſumentes nanquè baſis centrum, ab eo erigemus lineam ad rectos angulos ipſi plano baſis: perque eiuſmodi lineam, & per axem planum ducentes, id, quod propoſitum fuerat, aſſequemur. oſtenſum enim eſt in undecimo libro elementorum Euclidis, ſi re-*
18. undecimi. *cta linea plano alicui ad rectos angulos fuerit, & omnia, quæ per ipſam ducuntur, plana eidem ad rectos angulos eſſe. conum verò ſcalenum poſuit, quoniam in æquicruri pla-*
B *num baſi æquidiſtans idem eſt, quod ſubcontrariè ductum. præterea* Secetur, *inquit*, & altero plano ad rectos angulos ipſi triangulo per axem; quod abſcindat ex verticis parte triangulum ſimile ipſi A B C, ſubcontrariè verò poſitum. *illud ita fiet. ſit triangulum per axem A B C: ſumaturque in linea A B quodvis punctum G: &*
23. primi. *ad A G rectam lineam, & ad punctum in ea G, conſtituatur angulus A G K ipſi A B C æqualis. ergo triangulum A G K triangulo A B C ſimile erit, quanquam ſubcontrariè poſitum. itaque ſumatur in linea G K quodlibet punctum F, à quo erigatur F H ad rectos angulos ipſi plano trianguli A B C: & per lineas G K, H F planum ducatur:*
13. undecimi. *erit illud ad triangulum A B C rectum, quòd per lineam F H tranſeat, & faciet id, quod faciendum proponebatur. In concluſione dicit*, propter ſimilitudinem triangulo-
C rum D F G, E F K æquale eſſe rectangulum D F E rectangulo G F K. *quod quidem & abſque triangulorum ſimilitudine demonſtrari poteſt hoc pacto. quoniam enim uterque angulorum A K G, A D E æqualis eſt angulo qui ad B, in eadem erunt*

por-

portione circuli, puncta D, Q, E, K comprehendentis. & quoniam in circulo duæ rectæ lineæ D E, G K ſeſe ſecant in F: rectangulum D F E æquale eſt rectangulo G F K. 21. tertij. *Similiter demonſtrabuntur & omnes lineæ, ab ipſa G H K ductæ perpendiculares ad G K rectam, poſſe æquale ei, quod partibus ipſius G K continetur.* 35. tertij. circulus igitur ſectio eſt, D cuius diameter G K. *poſſumus autem hoc demonſtrare per deductionem ad id, quod fieri non poteſt. Si enim circulus, qui circa G K deſcribitur, non tranſit per H punctum: erit rectangulum K F G æquale quadrato lineæ maioris ipſa F H, vel minoris, quod non ponitur. ſed & illud idem recta demonſtratione oſtendemus. Sit linea quædam G H K, cui ſubtendatur recta G K; ſumantur autem & in linea duo quævis puncta H, O, à quibus ad ipſam G K perpendiculares ducantur H F, O P: ſitque quadratum F H æquale rectangulo G F K; & quadratum O P æquale ipſi G P K rectangulo. Dico lineam G H O K circulum eſſe. ſecetur enim G K recta bifariam in puncto N: & iungantur G H, H N, N O. Quoniam igitur recta linea G K ſecatur in partes æquales in N, & in partes inæquales in F: rectangulum G F K unà cum quadrato N F æquale erit quadrato N K.* 5. ſecũdi. *ſed rectangulum G F K poſitum eſt æquale quadrato H F. quare H F quadratum unà cum ipſo N F æquale eſt quadrato N K. æqualia autem ſunt H F, F N quadrata ipſi quadrato N H, cùm angulus ad F ſit rectus.* 47 primi. *ergo quadratum N H quadrato N K æquale erit. Similiter oſtendemus quadratum N O æquale eſſe quadrato N K. linea igitur G H K circulus eſt, & eius diameter G K.* 9. tertij.



fieri autem poteſt, ut diametri D E, G K quandoque æquales ſint, quandoque inæquales: nunquam tamen ſeſe bifariam ſecabunt. ducatur enim per K ipſi B C æquidiſtans N K. Quoniam igitur maior eſt B A, quàm A C: & ipſa N A, quàm A K maior erit. eadem ratione & K A maior eſt, quàm A G propter ſubcontrariam ſectionem. quare ſi à linea A N abſciſſa fuerit æqualis ipſi A K; inter puncta G, N cadet, ut A X: & per X ducta æquidiſtans ipſi B C ſecabit G K. ſecet ut X O P. Itaque quoniam æqualis eſt X A ipſi A K; & ſicut X A ad A P, ita K A ad A G ob ſimilitudinẽ triangulorum G K A, X P A: erit A G ipſi A P æqualis, & reliqua G X ipſi P K. 4. ſexti. 9. quinti. *& quoniam anguli ad puncta X, K inter ſe æquales ſunt, uterque enim ipſorum æqualis eſt angulo ad B; ſunt autem & qui ad O æquales, quòd ſecundum verticem: erit triangulum X G O ſimile triangulo P O K. ſed æqualis eſt G X ipſi P K. quare & X O ipſi O K, & G O ipſi O P, & tota G K toti X P eſt æqualis. Ex quibus conſtat, ſi inter G X ſumatur punctum R; & per R ducatur R S æquidiſtans G K: ipſam R S maiorem eſſe, quàm G K, & propterea maiorem, quàm X P. ſi verò inter puncta R, X ſumatur aliud punctum, ut T; & per ipſum ducatur T Y æquidiſtans X P: minor erit T Y, quàm X P; & ob id minor, quàm G K. præterea cùm angulus X P K maior ſit angulo A X P; æqualis autem O P K ipſi O G X: erit O G X angulus maior angulo G X O. ergo linea X O maior ipſa O G:* 19. primi. *& iccirco X O maior O P. Quòd ſi quandoque contingat, ut altera ipſarum bifariam ſecetur: tunc alteram in partes inæquales ſecari neceſſe erit.*



FED. COMMANDINVS.

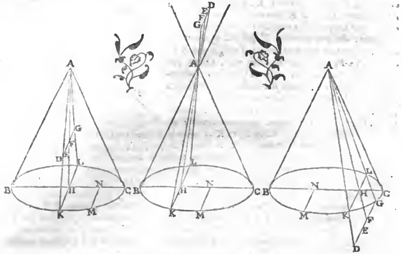
Et ſecetur plano per axem ad circulum B C recto.) *Quomodo hoc faciendum ſit, demonſtrat etiam Serenus in libro de ſectione coni, propoſitione 14.* A

THEO-

THEOREMA VI. PROPOSITIO VI.

SI conus plano per axem ſecetur; ſumatur autem aliquod punctum in ſuperficie coni, quod non ſit in latere trianguli per axem;
A & ab ipſo ducatur recta linea, æquidiſtans cuidam rectæ, quæ perpendicularis eſt à circunferentia circuli ad trianguli baſim: triangulo per axem occurret, & ulteriùs producta uſque ad alteram ſuperficiei partem, bifariam ab ipſo triangulo ſecabitur.

Sit conus, cuius vertex A punctum; baſis autem circulus B C; ſeceturque conus plano per axem, quod communem ſectionem faciat triangulum A B C: & ab aliquo puncto eorum, quæ ſunt in B C circunferentia, ut ab M ducatur M N perpendicularis ad ipſam B C rectam; ſumatur quoque in ſuperficie coni punctum D, per quod ipſi M N æquidiſtans ducatur D E. Dico lineam D E occurrere ſuperficiei trianguli A B C; & ulteriùs productam in alteram partem coni, quouſque ad eius ſuperficiem pertineat, à trianguli A B C plano bifariam ſecari. Iun-
1. huius. gatur A D, & producatur. occurret iam circumferentiæ circuli B C. occurrat in
28. primi. K, & à puncto K ad B C rectam perpendicularis ducatur K H L. æquidiſtans eſt igitur K H ipſi M N. quare & ipſi D E. ducatur ab A puncto ad H linea A H.



B Itaque quoniam in triangulo A H K, ipſi H K æquidiſtat D E, conveniet D E producta cum linea A H. eſt autem A H in plano trianguli A B C. ergo D E trianguli A B C plano occurret. occurrat in F: & producatur D E F in rectum, quouſque ad ſuperficiem coni pertineat in G. Dico D F ipſi F G æqualem eſſe. Quoniam enim puncta A,G,L ſunt & in ſuperficie coni,& in plano per A H,A K,D G,
3. huius. K L ducto, quod quidem triangulum eſt, cùm per verticem conum ſecet: erunt A,G,L in communi ſectione ſuperficiei coni, & ipſius trianguli. ergo recta linea
C eſt, quæ per A,G,L puncta tranſit. at cùm in triangulo A L K, ipſi K H L baſi æquidiſtans ducta ſit D G. & à puncto A ducatur A F H: erit ut K H ad H L, ita

ita D F ad F G. æqualis autem eſt K H ipſi H L, quòd in circulo B C perpendicularis ad diametrum ducitur K L. ergo & D F ipſi F G æqualis erit. 3. tertij.

EVTOCIVS.

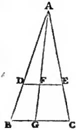
ANIMADVERTENDVM eſt, non fruſtra apponi in propoſitione, oportere rectam lineam ductam à puncto ſuperficiei, æquidiſtantem eſſe cuidam rectæ, quæ à circuli circumferentia perpendicularis eſt ad baſim trianguli per axem. niſi enim hoc ita ſit, fieri non poteſt, ut recta linea à triangulo bifariam ſecetur: quod quidem ex deſcripta figura manifeſtè apparet. Nam ſi linea M N, cui æquidiſtat D F G, ad ipſam B C non ſit perpendicularis: neque K L bifariam ſecabitur. eadem enim ratione colligimus, ut K H ad H L, ita eſſe D F ad F G: ergo & D G in partes inæquales ſecabitur ad punctum F. poteſt autem illud idem, tum infra circulum, tum in ſuperficie, quæ eſt ad verticem, ſimiliter demonſtrari. A

FED. COMMANDINVS.

Itaque quoniam in triangulo A H K, ipſi H K æquidiſtat D E, conveniet D E producta cum linea A H.] *Sequitur hoc ex ſecunda propoſitione perſpectivæ Vitellionis. ſunt enim D E, H A in eodem plano. nam cùm duas æquidiſtantes K H, D E coniungat recta linea K D: erunt, ex ſeptima propoſitione undecimi elementorum, tres lineæ H K, K D, D E in eodem plano. ſed & in eodem plano ſunt K H, H A, ex ſecunda propoſitione eiuſdem libri. ergo D E, H A in eodem plano ſint neceſſe eſt.* B

At cùm in triangulo A L K, ipſi K H L baſi æquidiſtans ducta ſit D G, & à puncto A ducatur A F H: erit ut K H ad H L, ita D F ad F G.] *Illud verò hoc lemmate demonſtrabimus.* C

Sit triangulum A B C, & ducta D E ipſi B C æquidiſtante, à puncto A ad baſim ducatur A G, quæ lineam D E ſecet in F. Dico D F ad F E ita eſſe, ut B G ad G C.



Quoniam enim B C, D E æquidiſtant inter ſe: erunt anguli 29. primi.
A B G, A D F æquales; itemque æquales inter ſe anguli A G B,
A F D. quare triangulum A D F ſimile eſt triangulo A B G. ea- 4. ſexti.
dem quoque ratione triangulum A F E oſtendetur ipſi A G C ſimile. 11. quīti.
ut igitur B G ad D F, ita eſt A G ad A F. & ut A G ad A F,
ita G C ad F E. quare ut B G ad D F, ita G C ad F E: & permu-
tando ut B G ad G C, ita D F ad F E.

THEOREMA VII. PROPOSITIO VII.

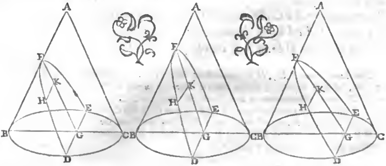
SI conus plano per axem ſecetur; ſecetur autem & altero plano, ſecante planum baſis coni ſecundùm rectam lineam, quæ ſit perpendicularis, vel ad baſim trianguli per axem, vel ad eam, quæ in directum ipſi conſtituitur: lineæ, quæ à ſectione in ſuperficie coni à plano facta ducuntur æquidiſtantes ei, quæ eſt perpendicularis ad trianguli baſim, in communem ſectionem plani ſecantis, & trianguli per axem cadent; & ulteriùs productæ ad alteram ſectionis partem, ab ea bifariam ſecabuntur. & ſiquidem

Digitized by Google

rectus ſit conus, linea, quæ eſt in baſi, perpendicularis erit ad communem ſectionem plani ſecantis, & trianguli per axem: ſi verò ſcalenus, non ſemper, niſi cùm planum, quod per axem ducitur, ad baſim coni rectum fuerit.

Sit conus cuius vertex punctum A, baſis B C circulus; & ſecetur plano per axem, quod ſectionem faciat triangulum A B C; ſecetur autem & altero plano ſecante planum, in quo eſt circulus B C, ſecundùm D E rectam lineam, vel perpendicularem ad B C, vel ad eam, quæ in directum ipſi conſtituitur: & faciat ſectionem in ſuperficie coni, lineam D F E; communis autem ſectio plani ſecantis, & trianguli A B C ſit F G; & ſumatur in ſectione D F E punctum H, à quo linea H K ipſi D E æquidiſtans ducatur. Dico H K lineæ F G occurrere; & ulteriùs productam ad alteram partem ſectionis D F E, à linea F G bifariam ſecari. Quoniam enim conus, cuius vertex A punctum, & baſis circulus B C, plano per axem ſecatur, quod ſectionem facit A B C triangulum; ſumitur autem in ſuperficie punctum H, quod non eſt in latere trianguli A B C; eſtque D G ad B C perpendicularis: ducta per H linea H K, ipſi D G æquidiſtans, triangulo A B C occurret; & ulteriùs producta ad alteram partem ſuperficiei à triangulo bifariam ſecabitur. & quoniam, quæ per H ducitur, æquidiſtans ipſi D E, occurrit triangulo A B C; atque eſt in plano ſectionis D F E: in communem ſectionem plani ſecantis, & trianguli A B C cadet. ſed linea F G eſt communis ſectio planorum. ergo per H ducta, ipſi D E æquidiſtans, cadit in lineam F G; & ulteriùs producta ad alteram ſectionis partem, ab ea bifariam ſecatur. Itaque, vel conus eſt rectus, vel triangulum A B C, quod per axem tranſit, rectum eſt ad B C circulum, vel neutrum horum contingit.

6. huius.



Sit primmù conus rectus: tunc & A B C triangulum ad circulum B C rectum erit. & quoniam planum A B C rectum eſt ad planum B C; & ad communem ipſorum ſectionem, videlicet ad lineam BC, in ipſo B C plano perpendicularis ducta eſt D E: erit D E & ad triangulum A B C perpendicularis; & ad omnes rectas lineas, quæ in triangulo A B C exiſtentes ipſam contingunt. quare & ad lineam F G. Sed non ſit conus rectus. ſi igitur triangulum per axem rectum eſt ad circulum B C; ſimiliter oſtendemus lineam D E ad F G perpendicularem eſſe. Quòd ſi triangulum per axem A B C non ſit rectum ad circulum B C: non erit ipſa D E ad F G perpendicularis. ſit enim, ſi fieri poteſt. eſt autem & perpendicularis ad B C. ergo D E ad utranque lineam B C, F G perpendicularis erit: & iccirco ad planum, quod per lineas B C, F G ducitur. ſed planum per B C, F G eſt A B C triangulum. linea igitur D E ad triangulum A B C eſt perpendicularis. quare & omnia, quæ per ipſam

4. & 3. diff. undecimi.

4. undecimi

ſam tranſeunt, plana ad A B C triangulum recta ſunt. planum verò, in quo eſt circulus B C per lineam D E tranſit. ergo B C circulus rectus eſt ad triãgulum A B C: ac propterea triangulum A B C ad B C circulum rectum erit. quod non ponebatur. non igitur D E ad ipſam F G eſt perpendicularis. 18. undecimi.

Ex quibus conſtat lineam F G diametrum eſſe ſectionis D F E, cùm lineas omnes, quæ in ipſa ducuntur, uni cuipiam æquidiſtantes, bifariam ſecet. conſtat præterea fieri poſſe; ut lineæ æquidiſtantes à diametro F G bifariam quidem, non autem ad rectos angulos ſecentur. 10. diffin. huius.

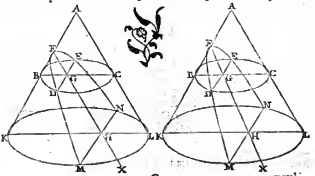
EVTOCIVS.

SEPTIMVM theorema quatuor caſus habet; vel enim F G non occurrit lineæ A C, vel tribus modis occurrit, aut extra circulum, aut intra, aut in ipſo C puncto,

THEOREMA VIII. PROPOSITIO VIII.

SI conus plano ſecetur per axẽ; & ſecetur altero plano ſecante baſim coni ſecundùm rectam lineam, quæ ad baſim trianguli per axem ſit perpendicularis; diameter autem ſectionis factæ in ſuperficie, vel æquidiſtet uni laterum trianguli, vel cum ipſo extra coni verticem cõveniat; & producantur in infinitum tum ſuperficies coni, tũ planũ ſecans: ſectio quoque ipſa in infinitum augebitur; & ex diametro ſectionis ad verticem cuilibet lineæ datæ æqualẽ abſcindet linea, quæ quidẽ à coni ſectione ei, quæ eſt in baſi, æquidiſtans ducta fuerit.

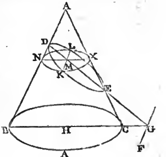
SIT conus, cuius vertex A punctum, baſis circulus B C; & ſecetur plano per axem, quod ſectionem faciat triangulum A B C: ſecetur etiam altero plano ſecante B C circulum ſecundùm rectam lineam D E perpendicularem ad ipſam B C; & faciat ſectionem in ſuperficie, lineam D F E; diameter autem ſectionis D F E ſit F G, quæ vel ipſi A C æquidiſtet, vel producta extra punctum A cum ipſa conveniat. Dico ſectionem D F E augeri in infinitum, ſi & coni ſuperficies, & ſecans planum in infinitum producantur. His enim productis, ſimul producentur & lineæ A B, A C, F G. & quoniam F G vel æquidiſtans eſt ipſi A C, vel producta extra punctum A cum ipſa cõvenit: lineæ FG, A C ad partes G C productæ nunquam conveniẽt iter ſeſe. producãtur ergo; ſumaturque in linea F G quodlibet punctum H; & per H ducatur K H L ipſi B C



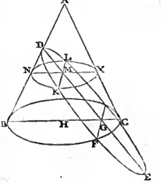
15. undecimi. æquidiſtans: ipſi verò D E æquidiſtans ducatur M H N. quare planum, quod
per K L, M N tranſit, æquidiſtans eſt plano per B C, D E: & iccirco circulus eſt
4. huius. K L M N planum. ſunt autem puncta D, E, M, N & in plano ſecante, & in ſuperficie coni. ergo & in ipſa communi ſectione erunt. ſectio igitur DFE aucta eſt uſque ad puncta M, N. ex quibus apparet; ſi tum coni ſuperficies, tum ſecans planum producantur ad K L M N circulum: & ſectionem ipſam D F E uſque ad M, N pũcta augeri. eadem ratione demonſtrabitur ſectionem M D F E N augeri in infinitum; ſi & ſuperficies coni, & planum ſecans in infinitum producantur. perſpicuum igitur eſt cuilibet datæ lineæ æqualem abſcindere lineam quandam ex ipſa F H ad partes F. ſi enim datæ lineæ æqualem ponamus F X; & per X ipſi D E æquidiſtantem ducamus; conveniet ea cum ſectione: quemadmodum & quæ per H demonſtrata eſt eum eadem ad puncta M, N convenire. quare poterit linea quædam duci æquidiſtans ipſi D E, quæ cum ſectione conveniat, & ex ipſa F G ad partes F lineæ datæ æqualem lineam abſcindat.

THEOREMA IX. PROPOSITIO IX.

SI conus plano ſecetur conveniente cum utroque latere trianguli per axem, quod neque baſi æquidiſtet, neque ſubcontrariè ponatur: ſectio circulus non erit.



SIT conus, cuius vertex A punctum, baſis circulus B C: & ſecetur plano aliquo, neque baſi æquidiſtante, neque ſubcontrariè poſito, quod ſectionem faciat in ſuperficie lineam DKE. Dico DKE non eſſe circulum. Sit enim, ſi fieri poteſt; occurratque planum ſecans ipſi baſi; ita ut communis planorum ſectio ſit recta linea F G; centrum autem circuli B C ſit H; & ab H ad F G perpendicularis ducatur H G: deinde per H G, & axem producatur planum, quod in conica ſuperficie ſectiones faciat B A, A C rectas lineas. Quoniam igitur puncta D, E, G ſunt & in plano, quod per DK E tranſit, & in eo, quod per A B C: neceſſariò in communi ipſorum ſectione erunt. quare recta linea eſt D E G. ſumatur in linea D K E punctum aliquod K; & per K lineæ F H æqui-
6. huius. diſtans ducatur K M L: erit K M ipſi M L æqualis. quare D E diameter eſt circuli D K E L. ducatur deinde per M linea N M X ipſi B C
æquidiſtans. eſt autem & K L æquidiſtans F G.
15. undecimi. ergo planum, quod per NX, K M ducitur, æqui-
diſtans eſt plano per B C, F G, hoc eſt ipſi baſi:
4. huius. proptereaque ſectio N K X L circulus erit. &
9. undecimi. quoniam F G perpendicularis eſt ad B C G: ſe-
quitur & K M ad N X perpendicularem eſſe.
quare rectangulum N M X æquale eſt quadra-
8. 17. ſexti. to K M. ſed & rectangulum D M E æquale eſt
K M quadrato: cùm linea D K E L circulus ponatur, cuius diameter D E. rectangulum igi-
14. ſexti. 6. tur N M X æquale eſt rectangulo D M E: &
iccirco ut N M ad M D, ita E M ad M X. qua-



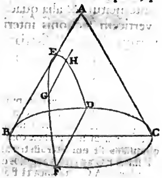
re

re D M N triangulum ſimile eſt triangulo X M E: & angulus D N M æqualis M E X angulo. ſed D N M angulus angulo A B C eſt æqualis; æquidiſtat enim N X ipſi B C. ergo & angulus A B C æqualis erit angulo M E X. ſubcontraria igitur ſectio eſt; quod non ponebatur. ex quibus manifeſtè conſtat lineam D K E circulum non eſſe.

THEOREMA X. PROPOSITIO X.

SI in coni ſectione duo puncta ſumantur, recta linea, quæ eiuſmodi puncta coniungit, intra ſectionem cadet; & quæ in directum ipſi conſtituitur, cadet extra.

SIT conus, cuius vertex punctum A, baſis B C circulus; ſeceturque plano per axem, & faciat ſectionem triangulum A B C: ſecetur autem & altero plano, quod in ſuperficie coni ſectionem faciat D E F lineam; & in ipſa D E F duo puncta ſumantur, quæ ſint G, H. Dico rectam lineam, quæ G, H puncta coniungit, intra ſectionem D E F cadere: & quæ in directum ipſi conſtituitur, extra. Quoniam enim conus, cuius vertex A punctum, & baſis circulus B C, plano ſecatur per axem, & in ſuperficie ipſius puncta quæpiam ſumuntur G, H, quæ non ſunt in latere trianguli per axem: linea, quæ à puncto G, ad H ducitur, non pertinebit ad A. ergo recta linea coniungens puncta G, H intra conum, hoc eſt intra coni ſectionem D E F cadet: & quæ in directum ipſi conſtituitur, cadet extra. 2. huius.



EVTOCIVS.

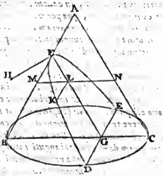
ANIMADVERTENDVM eſt decem hæc theoremata aptiſſimè cohærentia inter ſeſe, & continuata eſſe. Primum enim oſtendit rectas lineas, quæ in ſuperficie coni ad verticem pertinent, in eadem permanere. Secundum contra oſtendit. Tertium explicat coni ſectionem, quæ per verticem efficitur. Quartum ſectionem baſi æquidiſtantem. Quintum verò ſubcontrariam. Sextum eſt tanquam lemma ad ſeptimum; in quo oſtenditur oportere communem ſectionem plani ſecantis, & circuli, qui eſt baſis coni, ad eius diametrum perpendicularem eſſe, atque hoc ita habente, lineas omnes, quæ ipſi æquidiſtantes ducuntur, à triangulo bifariam ſecari. Septimum tres alias ſectiones, earũque diametrum oſtendit: & lineas, quæ ad ipſam diametrum ordinatim applicantur ei, quæ in baſi æquidiſtantes eſſe. In octavo demonſtrat, quod nos in principio diximus, videlicet parabolen, & hyperbolen ex eorum numero eſſe, quæ in infinitum augentur. In nono ellipſim, quæ in ſe ipſam vergit tanquam circulus, quod planum ſecans cum utroque latere trianguli conveniat, circulum non eſſe; ſubcontraria enim, & æquidiſtans ſectio circulum facit. Sed & illud ſcire oportet, diametrum ſectionis in parabola quidem unum duntaxat trianguli latus ſecare, & ipſam baſim: in hyperbola ſecare, & latus, & lineam, quæ reliquo lateri ad partes verticis producto in rectum conſtituitur: in ellipſi verò, & utrunque latus, & baſim ſecare. Poſſet fortaſſe quiſpiam arbitrari decimum theorema idem eſſe, quod ſecundum: ſed non ita res habet. illic enim in omni ſuperficie duo quævis puncta ſumi aſſerit; hic in ea tantùm linea, quæ à ſecante

plano efficitur. At in tribus, quæ deinceps ſequuntur, theorematibus unamquamque ſectionem diligentius expendit: & principes earum proprietates declarat.

THEOREMA XI. PROPOSITIO XI.

SI conus plano per axem ſecetur; ſecetur autem & altero plano, ſecante baſim coni ſecundùm rectã lineam, quæ ad baſim trianguli per axem ſit perpendicularis; & ſit diameter ſectionis, uni laterum trianguli per axem æquidiſtans: recta linea, quæ à ſectione coni ducitur, æquidiſtans communi ſectioni plani ſecantis, & baſis coni, uſque ad ſectionis diametrum, poterit ſpatium æquale contento linea, quæ ex diametro abſciſſa inter ipſam & verticem ſectionis interijcitur; & alia quadam, quæ ad lineam inter coni angulũ, & verticem ſectionis interiectam, eam proportionem habeat, quam quadratum baſis trianguli per axem ad id, quod reliquis duobus trianguli lateribus continetur. dicatur autem huiuſmodi ſectio parabole.

SIT conus, cuius vertex punctum A; baſis B C circulus; ſeceturque plano per axem, quod ſectionem faciat triangulum A B C; & ſecetur altero plano ſecante baſim coni ſecundùm rectam lineam D E, quæ ad B C ſit perpendicularis, & faciat ſectionem in ſuperficie coni D F E lineam: diameter autem ſectionis F G æquidiſtans ſit uni laterum trianguli per axem; videlicet ipſi A C; atque à puncto F lineæ F G ad rectos angulos ducatur F H, & fiat ut quadratum B C ad rectangulum B A C, ita linea H F ad F A. ſumatur præterea in ſectione quodlibet punctum K: & per K ducatur K L ipſi D E æquidiſtans. Dico quadratum K L rectangulo H F L æquale eſſe. Ducatur enim per L ipſi B C æquidiſtans M N: & eſt K L æquidiſtans ipſi D E. ergo planum, quod tranſit per K L M N plano per B C D E, hoc eſt ipſi baſi coni æquidiſtat. ideoque planum per K L M N circulus eſt, cuius diameter M N: eſt autem K L ad M N perpendicularis, quòd & D E ad B C. rectangulum igitur M L N æquale eſt K L quadrato. Itaque quoniam linea H F ad F A eſt ut quadratum B C ad rectangulũ B A C. quadratum autem B C ad B A C rectangulum compoſitam proportionem habet ex proportione, quam B C ad C A, & ex ea, quam C B habet ad B A: quare proportio H F ad F A componitur ex proportione B C ad C A, & C B ad B A. ut autem B C ad C A, ita M N ad N A, hoc eſt M L ad L F: & ut C B ad B A, ita N M ad M A, hoc eſt L M ad M F, & reliqua N L ad F A. proportio igitur H F ad F A componitur ex proportione M L ad L F, & N L ad F A. ſed proportio compoſita ex proportione M L ad L F, & N L ad F A eſt ea, quam habet M L N rectangulum ad rectangulum L F A. ergo ut H F ad F A, ita rectangulum M L N ad L F A rectangulum. ut autem



A

15. undecimi.
4. huius.
8. unde.

B

19. quinti

23. ſexti.

HF

Digitized by Google

H F ad F A, ſumpta F L communi altitudine, ita H F L rectangulum ad rectangulum L F A. ut igitur rectangulum M L N ad ipſum L F A, ita rectangulum H F L ad L F A: & iccirco æquale eſt rectangulum M L N rectangulo H F L. ſed rectangulum M L N æquale eſt quadrato K L. ergo quadratum K L rectangulo H F L æquale erit. Vocetur autem huiuſmodi ſectio parabole; & linea H F, iuxta quam poſſunt, quæ ad F G diametrum ordinatim applicantur: quæ quidem etiam recta appellabitur.

1. ſexti.

9. quinti.

EVTOCIVS.

E T fiat ut quadratum B C ad rectangulum BAC, ita linea H F ad lineam F A.] A *Manifeſtum eſt, quod dicitur, præterquam quòd aliqua adhuc declaratione indiget. Sit rectangulo B A C æquale rectangulum O P R; quadrato autem B C æquale id, quod ad lineam P R adiacens latitudinem habet P S: & fiat ut O P ad P S, ita A F ad F H, ergo factum iam erit, quod quærebamus. Quoniã enim ut O P ad P S, ita A F ad F H: erit & convertendo H F ad F A, ut S P ad P O.*



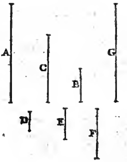
ut autem S P ad P O, ita rectangulum S R ad ipſum R O, hoc eſt B C quadratum ad rectangulum B A C. Hoc autem & ad duo, quæ ſequuntur, theoremata utile erit. 1. ſexti.

Quadratum autem B C ad B A C rectangulum compoſitam proportionem habet, &c.) *Oſtenſum enim eſt in ſexto libro elementorum Euclidis, theoremate vigeſimo tertio, æquiangula parallelogramma inter ſe proportionem habere ex lateribus compoſitam. Sed quoniam interpretes inductione magis, quàm neceſſaria argumentatione utuntur; viſum eſt nobis illud ipſum inveſtigare: quod tametſi ſcripſimus in commentariis in quartum theorema ſecundi libri Archimedis de ſphæra & cylindro, & in primum magnæ conſtructionis Ptolemæi, nihilominus tamen & hoc loco non ineptè repetetur; propterea quòd fortaſſe non omnes, qui hæc legent, in illos libros inciderunt: tum etiam, quòd univerſa ferè conicorum tractatio eum argumentandi modum uſurpat.* Proportio ex proportionibus componi dicitur, quando proportionum quantitates inter ſe multiplicatæ aliquam producunt. *Per quantitatem intelligendo numerum, à quo proportio ipſa denominatur. in multiplicibus quidem quantitas erit numerus integer; in reliquis verò habitudinibus neceſſe eſt quantitatem numerum eſſe, & partem, ſeu partes, niſi fortè quiſpiam velit etiam ἀῤῥήτους, videlicet quæ exprimi non poſſunt, habitudines eſſe, quales ſunt magnitudinum irrationalium. Itaque in omnibus habitudinibus ipſa quantitas multiplicata in conſequentem terminum producit antecedentem. Sit igitur proportio A ad B; & ſumpto termino quolibet intermedio C, ſit proportionis A, C quantitas D; proportionis autem C, B quantitas ſit E: & D multiplicans E producat F. Dico F proportionis A, B quantitatem eſſe, hoc eſt ſi F multiplicet B produci ipſum A. Itaque multiplicet F ipſum B, & producat G. Quoniam igitur D ipſum quidem E multiplicans producit F; multiplicans autem C ipſum A producit: erit F ad A, ut E ad C. Rurſus cùm B multiplicans E faciat C, & multipli-* 17. ſeptimi.

Digitized by Google

plicans F faciat G: erit ut E ad F, ita C ad G; & permutando ut E ad C, ita F ad G. ſed ut E ad C, ita erat F ad A. ergo G ipſi A eſt æqualis: & iccirco F multiplicans B producit A. proportionis igitur A B, F quantitas neceſſariò erit. Non perturbentur autem qui in hac inciderint, quòd illud ex arithmeticis demonſtretur: antiqui enim huiuſmodi demonſtrationibus ſæpe uti conſueverunt; quæ tamen mathematica potiùs ſunt, quàm arithmetica propter analogias. adde quòd quæſitũ arithmeticum eſt; nam proportiones, proportionum quantitates, & multiplicationes primo numeris, ſecundo loco per numeros & magnitudinibus inſunt, ex illius ſententia, qui ita ſcripſit, ταῦτα γὰρ τὰ μαθήματα δοκοῦντι ἦμεν ἀδελφά. hoc eſt, hæ enim mathematicæ diſciplinæ germanæ eſſe videntur.

9. quinti.



THEOREMA XII. PROPOSITIO XII.

SI conus plano per axem ſecetur; ſecetur autem & altero plano, ſecante baſim coni ſecundùm rectam lineam, quæ ad baſim trianguli per axem ſit perpendicularis; & ſectionis diameter producta, cum vno latere trianguli per axem, extra verticem coni cõueniat: recta linea, quæ à ſectione ducitur æquidiſtans communi ſectioni plani ſecantis, & baſis coni uſque ad ſectionis diametrum, poterit ſpatium adiacens lineæ, ad quam ea, quæ in directum conſtituitur diametro ſectionis, ſubtenditurque angulo extra triangulum, eandem proportionem habet, quam quadratum lineæ, quæ diametro æquidiſtans à vertice ſectionis uſque ad baſim trianguli ducitur, ad rectangulum baſis partibus, quæ ab ea fiunt, contentum; latitudinem habens lineam, quæ ex diametro abſcinditur, inter ipſam & verticem ſectionis interiectam, excedensque figura ſimili, & ſimiliter poſita ei, quæ continetur linea angulo extra triangulum ſubtenſa, & ea, iuxta quam poſſunt, quæ ad diametrum applicantur. vocetur autem huiuſmodi ſectio hyperbole.

SIT conus, cuius vertex A punctum, baſis circulus B C; & ſecetur plano per axem, quod ſectionem faciat triangulum A B C; ſecetur autem & altero plano, ſecante baſim coni ſecundùm rectam lineam D E ad B C baſim trianguli A B C perpendicularem; faciatque ſectionem in ſuperficie coni lineam D F E; & ſectionis diameter F G producta, cum ipſo AC latere trianguli A B C, extra coni verticem conveniat in puncto H: deinde per A ducatur linea A K diametro æquidiſtans, quæ ſecet B C; & ab F ducatur F L ad rectos angulos ipſi F G; fiatque ut quadratum K A ad rectangulum B K C, ita H F linea ad lineam F L. ſumatur autem in ſectione quodlibet punctum M, & per M ducatur M N æquidiſtans D E;

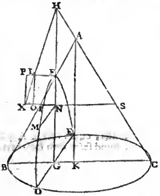
& per

& per N ipſi F L æquidiſtans ducatur N O X. poſtremò, iuncta H L, & ad X producta, per L X ipſi F N æquidiſtantes ducantur L O, X P. Dico lineam M N poſſe ſpatium F X, quod quidem adiacet lineæ F L, latitudinem habens F N, exceditque figura L X ſimili ei, quæ H F L continetur. Ducatur enim per N linea R N S æquidiſtans B C. eſt autem & M N ipſi D E æquidiſtans. ergo planum, quod tranſit per M N, R S æquidiſtat plano per B C, D E, hoc eſt baſi coni. Si igitur planum per M N, R S producatur: ſectio circulus erit, cuius diameter R N S. atque eſt ad ipſam perpendicularis M N. ergo rectangulum R N S æquale eſt M N quadrato. Itaque quoniam ut A K quadratum ad rectangulum B K C, ita eſt H F ad F L. proportio autem quadrati A K ad rectangulum B K C componitur ex proportione, quam habet A K ad K C, & ex ea, quam A K habet ad K B. & proportio H F ad F L cõpoſita erit ex proportione A K ad K C, & proportione A K ad K B. ſed ut A K ad K C, ita H G ad G C, hoc eſt H N ad N S: & ut A K ad K B, ita F G ad G B, hoc eſt F N ad N R. proportio igitur H F ad F L componitur ex proportione H N ad N S, & F N ad N R. at proportio compoſita ex proportione H N ad N S, & F N ad N R; eſt ea, quam H N F rectangulum habet ad rectangulum S N R. ergo ut rectangulum H N F ad S N R, ita H F ad F L, hoc eſt H N ad N X. ut autem H N ad N X, ſumpta F N communi altitudine, ita H N F rectangulum ad rectangulum F N X. quare ut rectangulum H N F ad rectangulum S N R, ita rectangulum H N F ad ipsũ F N X. rectangulum igitur S N R æquale eſt rectangulo X N F. ſed quadratum M N oſtenſum eſt æquale rectangulo S N R. ergo quadratum M N rectangulo X N F æquale erit. rectangulum autem X N F eſt parallelogrammum X F. linea igitur M N poteſt ſpatium X F, quod lineæ F L adiacet, latitudinem habens F N, excedenſque figura L X ſimili ei, quæ H F L continetur. Dicatur autem huiuſmodi ſectio hyperbole: & linea L F, iuxta quam poſſunt, quæ ad F G ordinatim applicantur. quæ quidem etiam recta appellabitur, tranſverſa verò H F.

15. undecimi.

4. huius.

23. ſexti.
1. ſexti.
9. quinti.



FED. COMMANDINVS.

Linea igitur M N poteſt ſpatium X F, quod lineæ F L adiacet, latitudinem habens F N, excedensque figura L X ſimili ei, quæ H F L continetur.) *Græca verba ſic habent, ἡ ἄρα Μ Ν δύναται τὸ Ξ Ζ, ὃ παράκειται παρὰ τὴν Ζ Λ πλάτος ἔχον τὴν Ζ Λ, ὑπερβάλλον εἴδει τῷ Λ Ξ, ὁμοίῳ ὄντι τῷ ὑπὸ τῆς Θ Ζ Λ. ex quibus ſatis perſpicuè apparere poteſt, unde dicta ſit ſectio hyperbole.*

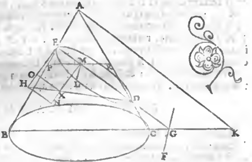
THEOREMA XIII. PROPOSITIO XIII.

SI conus plano per axem ſecetur, & ſecetur altero plano conveniente cum utroque latere trianguli per axem, quod neque baſi coni æquidiſtet, neque ſubcontrariè ponatur; planum autem, in quo eſt baſis coni, & ſecans planum conveniant ſecundùm rectam lineam, quæ ſit perpendicularis vel ad baſim trianguli per axem,

vel

vel ad eam, quæ in directum ipſi conſtituitur: recta linea, quæ à ſectione coni ducitur æquidiſtans communi ſectioni planorum uſque ad diametrum ſectionis, poterit ſpatium adiacens lineæ, ad quam ſectionis diameter eam proportionem habeat, quam quadratum lineæ diametro æquidiſtantis à vertice coni uſque ad trianguli baſim ductæ, habet ad rectangulum contentum baſis partibus, quæ inter ipſam & rectas trianguli lineas interijciuntur; latitudinem habens lineam, quæ ex diametro ab ipſa abſcinditur ad verticem ſectionis, deficienſque figura ſimili, & ſimiliter poſita ei, quæ diametro, & linea iuxta quam poſſunt, continetur. dicatur autem huiuſmodi ſectio ellipſis.

Sit conus, cuius vertex A punctum, baſis circulus B C; & ſecetur plano per axem, quod ſectionem faciat triangulum A B C; ſecetur autem & altero plano, conueniente cum utroque latere trianguli per axem, neque baſi coni æquidiſtante, neque ſubcontrariè poſito, quod faciat ſectionem in ſuperficie coni lineam D E; & communis ſectio plani ſecantis, atque eius, in quo eſt baſis coni, ſit F G perpendicularis ad B C; diameter autem ſectionis E D: & ab E ducatur E H ad E D perpendicularis; perque A ducta A K ipſi E D æquidiſtante, fiat ut quadratum A K ad rectangulum B K C, ita D E ad E H; ſumatur præterea in ſectione punctum L; & per L ipſi F G æquidiſtans ducatur L M. Dico L M poſſe ſpatium, quod lineæ E H adiacet, latitudinem habens E M, deficienſque figura ſimili ei, quæ D E H continetur.



Iungatur enim D H; perque M ducatur M X N æquidiſtans EH: & per H, X puncta ipſi E M æquidiſtãtes ducantur HN, XO; poſtremò per M ducatur P M R æquidiſtans B C. Itaque quoniam P R æquidiſtat
15. undecimi. B C; & L M ipſi F G: erit planum ductum per L M, P R æquidiſtans plano per F G, B C ducto, hoc eſt baſi coni. ſi igitur planum per
4. huius. L M, P R producatur: fiet ſectio circulus, cuius diameter P R. & eſt L M ad ipſam perpendicularis. ergo rectangulum P M R æquale eſt L M quadrato. quòd cùm ſit, ut quadratum A K ad rectangulum B K C, ita D E ad E H: & propor-
23. ſexti. tio quadrati A K ad rectangulum B K C componatur ex proportione, quam habet A K ad K B, & ex ea, quam A K habet ad K C. ut autem A K ad K B, ita E G ad G B, hoc eſt E M ad M P: & ut A K ad K C, ita D G ad G C, hoc eſt D M ad M R. erit proportio D E ad E H compoſita ex proportione E M ad M P, & ex proportione D M ad M R. ſed proportio compoſita ex proportione E M ad M P, & D M ad M R eſt ea, quam E M D rectangulum habet ad rectangulum P M R. quare ut rectangulum E M D ad ipſum P M R, ita D E ad E H, videlicet D M ad M X. ut autem D M ad M X, ſumpta M E communi altitudine, ita rectangulum D M E ad rectangulum X M E. ergo ut D M E rectangulum ad rectangulum

gulum PMR, ita erit D M E rectangulum ad ipſum X M E. æquale igitur eſt rectãgulum PMR rectangulo XME. ſed rectangulum P M R demonſtratum eſt æquale quadrato L M. quare & ipſum X M E quadrato L M æquale erit. linea igitur L M poteſt ſpatium M O: quod quidem lineæ E H adiacet, latitudinem habens E M, deficienſque figura O N ſimili ei, quæ D E H continetur. Vocetur autem huiuſmodi ſectio ellipſis: & linea E H, iuxta quam poſſunt, quæ ad diametrum D E ordinatim applicantur; quæ quidem & recta vocabitur; E D verò tranſverſa.

EVTOCIVS.

SCIRE oportet hoc theorema tres habere deſcriptiones, ut ſæpius dictum eſt in ellipſi: vel enim D E convenit cum latere A C ſupra C punctum, vel in ipſo C, vel infra cum eo producto convenit.

FED. COMMANDINVS.

LINEA igitur L M poteſt ſpatium M O: quod quidem lineæ E H adiacet, latitudinem habens E M, deficienſque figura O N ſimili ei, quæ D E H continetur) *Græca verba ſunt hæc.* ἡ ΛΜ ἄρα δύναται τὸ Μ Ο, ὃ παράκειται παρὰ τὴν Θ Ε πλάτος ἔχον τὴν Ε Μ, ἐλλεῖπον εἴδει τῷ ΟΝ ὁμοίῳ ὄντι τῷ ὑπὸ Δ Ε Θ. *ex quibus manifeſtè conſtat, cur ea ſectio ellipſis appellata ſit.*

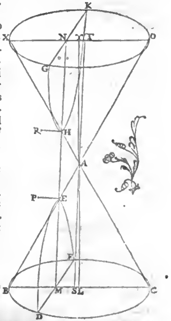
THEOREMA XIIII. PROPOSITIO XIIII.

SI ſuperficies, quæ ad verticem ſunt, plano non per verticem ſecentur; erit in utraque ſuperficierum ſectio, quæ vocatur hyperbole; & duarum ſectionum eadem erit diameter: lineæ verò, iuxta quas poſſunt applicatæ ad diametrum æquidiſtantes ei, quæ eſt baſis coni, inter ſe æquales erunt; & figuræ tranſverſum latus utriſque commune; quod ſcilicet inter ſectionum vertices interijcitur. vocentur autem huiuſmodi ſectiones oppoſitæ.

Sint ad verticem ſuperficies, quarum vertex A punctum: & ſecentur plano non per verticem, quod ſectiones faciat in ſuperficie lineas D E F, G H K. Dico utranque ſectionum D E F, G H K hyperbolen eſſe. Sit enim circulus B D C F, in quo fertur recta linea ſuperficiem deſcribens; ducaturque in ſuperficie, quæ eſt ad verticem, planum ipſi æquidiſtans X G O K; & communes ſectiones ipſarum ſectionum D E F, G H K, & circulorum ſint F D, G K, quæ & æquidiſtantes erunt: axis autem conicæ ſuperficiei ſit recta linea L A Y; 16. unde.
circulorum centra L, Y; & ab L ad lineam F D perpendicularis ducta producatur ad B, C puncta; perque B C, & axem planum ducatur, quod ſectiones faciat in circulis quidem rectas lineas X O, B C æquidiſtantes; in ſuperficie verò ipſas B A O, C A X; erit X O ad G K perpendicularis; quoniam & B C perpendicularis eſt ad F D; & utraque eſt æquidiſtans. 10. unde.
Quòd cùm planum per axem ductum ſectionibus occurrat ad puncta M, N, quæ ſunt intra lineas: planè conſtat ipſum etiam lineas ſecare in H, E. ergo puncta M, E, H, N erunt & in plano per axem & in eo in quo ſunt lineæ ipſæ: & propterea MEHN

recta

recta linea erit. conſtat etiam puncta X, H, A, C in eadem recta eſſe: itéque 3. undecimi. B, E, A, O; quòd ſint in ſuperficie conica, & in plano per axem. Ducantur ergo à punctis H, E ipſi H E ad rectos angulos lineæ H R, E P; perque A lineæ M E H N æquidiſtans ducatur S A T: & fiat ut quadratum A S ad rectangulum B S C, ſic H E ad E P; & ut quadratum A T ad rectangulum O T X, ſic E H ad H R. Itaque quoniam conus, cuius vertex A, baſis B C circulus, ſecatur plano per axem, quod ſectionem facit triangulum A B C; ſecatur autem & altero plano, ſecante baſim coni ſecundùm rectam lineam D M F, ad B C perpendicularem, quod ſectionem facit in ſuperficie D E F lineam; diameterque M E producta cum uno latere trianguli per axem extra coni verticem convenit; & per punctum A diametro ſectionis E M æquidiſtans ducitur A S; ab E verò ducitur E P ad rectos angulos ipſi E M; atque eſt ut quadratum A S ad rectangulum B S C, ita H E ad E P: erit ipſa DEF 12. huius. ſectio hyperbole; & E P recta linea, iuxta quam poſſunt, quæ ad E M ordinatim applicantur; tráſverſum verò figuræ latus HE. Eadem ratione & G H K hyperbole erit, cuius diameter H N: recta linea H R, iuxta quam poſſunt ordinatim ad H N applicatæ, & H E tranſverſum figuræ latus. Dico præterea H R ipſi E P æqualem eſſe. Quoniam enim æquidiſtantes ſunt B C, X O: ut 4. ſexti. 23. A S ad S C, ita erit A T ad T X; & ut A S ad S B, ita AT ad TO. ſed proportio A S ad S C unà cum proportione A S ad S B eſt ea, quam habet A S quadratum ad rectangulum B S C: & proportio A T ad T X unà cum proportione A T ad T O eſt, quam habet quadratum AT ad rectangulum X T O. ergo ut quadratum A S ad rectangulum B S C, ita quadratum AT ad rectangulum XTO. ut autem quadratum A S ad B S C rectangulum, ita H E ad E P: & ut quadratum 11. quinti. 9. A T ad rectangulum X T O, ita H E ad H R. ergo ut H E ad E P, ita E H ad H R. æqualis igitur eſt E P ipſi H R.



EVTOCIVS.

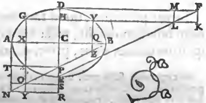
POTERAT etiam hoc modo oſtendi; ut quadratum A S ad rectangulum B S C, ita eſſe quadratum A T ad X T O rectangulum. Quoniam enim æquidiſtant B C, X O: 4. ſexti. lem. in 23. decimi. *erit ut C S ad S A, ita X T ad T A. & eadem ratione ut A S ad S B, ita A T ad T O. ergo ex æquali ut C S ad S B, ita X T ad T O. & ideo ut quadratum C S ad rectangulum C S B, ita quadratum X T ad rectangulum X T O. ſed propter ſimilitudinem triangulorum ut quadratum A S ad quadratum S C, ita quadratum A T ad quadratum T X. quare ex æquali ut A S quadratum ad rectangulum B S C, ita quadratum A T ad rectangulum X T O. atque eſt ut quadratum A S ad rectangulum BSC, ita H E ad E P: & ut quadratum A T ad rectangulum X T O, ita E H ad H R. ut ergo H E ad E P, ita E H ad H R. æqualis igitur eſt E P ipſi H R. Hoc theorema caſum non habet; propoſitum autem idem eſt, quod etiam in tribus ſuperioribus: ſimiliter enim & oppoſitarum ſectionum principalem diametrum inquirit; & lineas, iuxta quas poſſunt, quæ ad ipſam ordinatim applicantur.*

THEO-

THEOREMA XV. PROPOSITIO XV.

SI in ellipſi à puncto, quod diametrum bifariam dividit, ordinatim ducta linea ex utraque parte ad ſectionem producatur; & fiat ut producta ad diametrum, ita diameter ad aliam lineam: recta linea, quæ à ſectione ducitur ad productam, diametro æquidiſtans, poterit ſpatium adiacens tertiæ proportionali, latitudinem habens lineam, quæ inter ipſam, & ſectionem interijcitur, deficienſque figura ſimili ei, quæ continetur linea, ad quam ducuntur; & ea iuxta quam poſſunt. Quòd ſi ulteriùs producatur ad alteram partem ſectionis, bifariam ſecabitur ab ea, ad quam applicata fuerit.

SIT ellipſis, cuius diameter A B, ſeceturque AB bifariam in C puncto; & per C ordinatim applicata ex utraque parte ad ſectionem producatur, quæ ſit D CE; à puncto autem D ipſi D E ad rectos angulos ducatur D F; fiatque ut D E ad A B, ita A B ad D F: & ſumpto quolibet puncto G in ſectione, per G ducatur G H ipſi AB æquidiſtans, & iungatur EF; deinde per H ipſi DF æquidiſtans ducatur HL; & per F, L ducantur ipſi H D æquidiſtantes F K, L M. Dico lineam G H poſſe ſpatium D L: quod quidem adiacet lineæ DF, latitudinem habens DH; deficienſque figura F L ſimili ei, quæ E D F continetur. Sit enim linea A N, iuxta quam poſſunt ordinatim applicatæ ad A B; iungaturque B N: & per G quidem ipſi D E æquidiſtans ducatur G X; per X, C ipſi AN æquidiſtantes XO, C P; per N, O, P verò ducãtur NYR, O S, T P, æquidiſtantes ipſi A B. æquale igitur eſt D C quadratum rectangulo A P, & quadratum G X rectangulo A O. Itaque quoniam ut B A ad A N, ita eſt B C ad C P, & P T ad T N. æqualis autem B C ipſi C A, hoc eſt ipſi P T: & CP ipſi T N, & B P ipſi P N æqualis erit. ergo A P rectã-

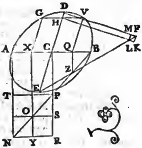


13. huius.

14. quinti.

gulum æquale rectangulo TR, & rectangulum XT ipſi T Y. quòd cùm rectangulum O T rectangulo O R æquale ſit, commune autem N O: erit rectangulum T Y ipſi N S æquale. ſed T Y eſt æquale T X, & commune T S. totum igitur rectangulum N P, hoc eſt PA, æquale erit rectangulo A O unà cum P O rectangulo. quare P A rectangulum ſuperat rectangulum A O ipſo O P. eſt autem P A rectangulum æquale C D quadrato: rectangulũque A O æquale quadrato X G, & O P ei, quod lineis O S P continetur. ergo C D quadratum ſuperat quadratum X G ipſo O S P rectangulo. & quoniam linea D E ſecatur in partes æquales in C puncto, & in partes inæquales in H: rectangulum E H D unà cum quadrato C H, hoc eſt X, G æquale erit C D quadrato. ex quo ſequitur, quadratum C D ſuperare X G quadratum rectangulo E H D. ſuperabat autem, ut monſtratum eſt, & rectan-

43. primi.



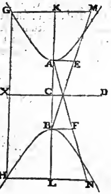
5. ſecũdi.

gulo O S P. rectangulum igitur E H D rectangulo O S P eſt æquale. Præterea cùm ſit ut D E ad A B, ita A B ad D F: erit ut D E ad D F, ita D E quadratum ad quadratum A B, hoc eſt quadratum C D ad quadratum C B. atque eſt qua-
4.& 1. ſexti. drato C D æquale P C A rectangulum, hoc eſt P C B. vt ergo E D ad D F, hoc eſt ut E H D rectangulum ad rectangulum D H L, ita rectangulum P C B ad C B
4. ſexti. quadratum, hoc eſt rectangulum P S O ad quadratum O S. ſed rectangulum
9. quinti. E H D æquale eſt ipſi P S O. rectangulum igitur D H L quadrato O S, hoc eſt quadrato G H eſt æquale: & iccirco linea G H poteſt ſpatium DL, quod adiacet lineæ D F latitudinem habens D H, deficienſque figura F L ſimili ei, quæ E D F continetur. Dico inſuper G H productam ad alteram partem ſectionis ab ipſa D E bifariam ſecari. Producatur enim, occurratque ſectioni in puncto V: & per V ipſi G X æquidiſtans ducatur V Q, & per Q ducatur Q Z æquidiſtans A N. Quoniam igitur G X ipſi V Q eſt æqualis: erit G X quadratum æquale quadrato V Q. quadratum autem G X æquale eſt A X O rectangulo: & quadratum V Q æquale re-
13. huius. ctangulo A Q Z. ergo ut O X ad Z Q, ita Q A ad A X. & eſt ut O X ad Z Q, ita
14. ſexti. X B ad B Q. ut ergo Q A ad A X, ita X B ad B Q: & dividendo ut Q X ad X A,
4. 9. quinti. ita X Q ad Q B. æqualis igitur eſt A X ipſi Q B. eſt autem A C æqualis C B. quare & reliqua X C reliquæ C Q: & iccirco G H ipſi H V eſt æqualis. linea igitur G H producta ad alteram ſectionis partem ab ipſa D E bifariam ſecabitur.

THEOREMA XVI. PROPOSITIO XVI.

SI per punctum, quod tranſverſum latus oppoſitarum ſectionum bifariam dividit, recta linea quædam ordinatim applicetur: ipſarum diameter erit, priori diametro coniugata.

Sint oppoſitæ ſectiones, quarum diameter A B: ſeceturque A B bifariam in C puncto; & per C ordinatim applicetur CD. Dico C D diametrum eſſe coniugatam ipſi A B. Sint enim, iuxta quas poſſunt ordinatim applicatæ A E, B F; & iunctæ A F, B E producantur: ſumpto autem in altera ſectione quovis puncto G, ducatur per G ipſi A B æquidiſtans G H, & à punctis G, H ordinatim applicentur G K, H L; deinde à punctis K, L ipſis A E, B F æquidiſtantes ducantur. K M, L N. Quoniam igitur æqualis eſt G K ipſi HL: erit GK quadratum quadrato HL

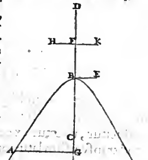


34. primi. æquale. ſed quadratum G K æquale eſt rectangulo AKM;
12. huius. & quadratum H L rectangulo B L N. ergo A K M rectangulum rectangulo B L N æquale erit. & cùm æquales ſint
14. huius. A E, B F; erit ut A E ad A B, ita B F ad B A. ut autem AE
7. quinti. ad A B, ſic M K ad K B: & ut F B ad B A, ſic N L ad L A. quare ut M K ad K B, ſic N L ad L A. ſed ut M K ad K B, ſumpta K A communi altitudine, ita rectangulum M K A ad rectangulum BKA: & ut N L ad LA, ſumpta communi altitudine BL, ita NLB rectangulum ad rectāgulum ALB, ergo ut rectangulum M K A ad rectangulum B K A, ita rectangulum NLB ad ipſum A L B: & permutando ut MKA rectangulum ad rectangulum N L B, ita B K A rectangulum ad rectangulum A L B. eſt autem rectangulum MKA æquale rectangulo N L B. quare & B K A rectangulum rectangulo A L B: &
A. propterea linea A K lineæ L B æqualis erit. eſtque A C æqualis C B. ergo & tota K C toti C L: & ideo G X ipſi X H æqualis. linea igitur G H ab ipſa X C D bifariam ſecabitur, atque eſt ipſi A B æquidiſtās. ergo & XCD diameter erit coniugata AB.

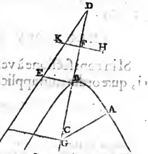
E V-

EVTOCIVS.

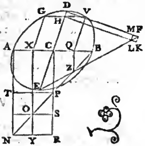
QVARE & B K A rectangulum rectangulo A L B: & propterea linea A K linæ A
L B æqualis erit.) *Quoniam enim rectangulum B K A ipſi A L B rectangulo eſt aquale: erit ut K B ad A L, ita L B ad A K; permutandoque ut K B ad B L, ita L A ad* 14. ſexti.
A K; & componendo vt K L ad L B, ita L K ad K A, aqualis igitur eſt A K ipſi B L.
Animadvertendum autem eſt in quintodecimo, & 9. quinti.
ſexto decimo theoremate Apollonio propoſitum fuiſſe, vt ſecundas & coniugatas, quas vocant, diametros inquireret, tum ellipſis, tum hyperbola, ſeu oppoſitarum ſectionum: parabole enim eiuſmodi diametrum non habet. Sed & illud notatione dignum eſt, diametros ellipſis intra recipi: hyperbola verò, & oppoſitarum ſectionum diametros deſcribi extra. Oportet autem lineas, iuxta quas poſſunt ordinatim applicata, ſeu recta latera (Graci ὀρθίας πλευρὰς dicunt) & lineas, qua ipſis aquidiſtant, ad rectos angulos aptare: ordinatim verò applicatas, & ſecundas diametros non omnino. maximè tamen deberent in acuto angulo applicari, vt longè alia, & diverſa ab eis, qua recto lateri aquidiſtant, deprehenderentur.



Poſt ſextum decimum theorema diffinitiones tradit eius, qua ſecunda diameter appellatur hyperbola & ellipſis: quibus quidem nos ex figuris lucem afferre conabimur. Sit hyperbole A B, cuius diameter G C B D: linea verò, iuxta quam poſſunt, qua ad ipſam B C applicantur, ſit B E. patet igitur B C in infinitum augeri propter ſectionem, vt oſtenſum eſt in octavo theoremate. ſed ipſa B D, qua ſubtenditur angulo extra triangulum per axem, terminata eſt. itaque ſi bifariam ſecta B D in F, & à puncto A ordinatim applicata A G, per F linea A G aquidiſtantem duxerimus H F K, ita vt ſit H F ipſi F K aqualis, & quadratum H K aquale rectangulo D B E: erit H K ſecunda diameter; hoc enim fieri poſſe perſpicuum eſt, quippe cùm H K extra ſectionem cadens in infinitum produci poſſit; atque à linea infinita cuilibet data linea aqualis facilè abſcindatur.



punctum autem F vocat centrum, & lineam F B, & alias, qua ſimiliter à puncto F ad ſectionem ducuntur, ex centro appellat. atque hac in hyperbola, & oppoſitis ſectionibus. conſtat ergo vtranque diametrum terminatam eſſe: primam quidem per ſeſe ex generatione ſectionis, ſecundam verò, quòd media proportionalis ſit inter lineas terminatas, videlicet inter primam diametrum, & eam, iuxta quam poſſunt, qua ad diametrum ordinatim applicantur. Sed in ellipſi id, quod dictum eſt, nondum apparet. Itaque cùm ipſa in ſe ipſam vergat inſtar circuli; & omnes diametros intra recipiat, atque terminet: omnino in ellipſi, qua media eſt proportionalis inter figura latera, ductaque per centrum ſectionis, & à diametro bifariam diviſa, ab ipſa ſectione terminatur. quod ex ijs, qua dicta ſunt in quinto decimo theoremate oſtendere poſſumus.



Quoniam enim vt demonſtratum eſt, qua ad lineam D E applicantur aquidiſtantes ipſi A B, poſſunt ſpatia tertia proportionali earum adiacentia, videlicet linea

F D: erit ut D E ad A B, ita A B ad D F. quare A B media proportionalis eſt inter E D, D F. & iccirco, quæ applicantur ad A B, ipſi D E æquidiſtantes, poterunt ſpatia adiacentia tertiæ proportionali ipſarum D E, A B, hoc eſt lineæ A N. ergo D E ſecunda diameter media eſt proportionalis inter B A, A N figuræ latera. Oportet autem hoc ſcire etiam ob commodam figurarum deſcriptionem. nam cùm inæquales ſint A B, D E diametri; in circulo enim tantùm ſunt æquales: conſtat lineam, quæ maiori earum ad rectos angulos ducitur, ut hoc in loco D F, tanquam tertia proportionalis ipſarum D E, A B, utriſque minorem eſſe; eam verò, quæ ad angulos rectos ducitur minori, ut A N, tanquam tertia proportionalis ipſarum A B, D E, utriſque eſſe maiorem; ita ut quatuor continuè proportionales ſint. ut enim A N ad D E, ſic eſt D E ad A B, & A B ad D F.

DIFFINITIONES SECVNDÆ.

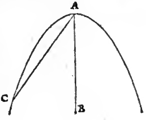
1 Punctum, quod hyperbolæ, & ellipſis diametrum bifariam dividit, centrum ſectionis dicatur. 2 Et quæ à centro ad ſectionem perducitur, vocetur ex centro ſectionis. 3 Similiter & punctum, quod tranſverſum latus oppoſitarum ſectionum bifariam dividit, centrum vocetur. 4 Quæ autem à centro ducitur æquidiſtans ei, quæ ordinatim applicata eſt, mediáque proportionem habet inter latera figuræ, & bifariam ſecatur à centro, ſecunda diameter appelletur,

THEOREMA XVII. PROPOSITIO XVII.

SI in coni ſectione à vertice ipſius ducatur recta linea æquidiſtans ei, quæ ordinatim applicata eſt: extra ſectionem cadet.

Sit coni ſectio, cuius diameter A B. Dico lineam, quæ à vertice, hoc eſt ab A puncto ducitur æquidiſtans ei, quæ ordinatim applicata eſt, extra ſectionem cadere. Si enim fieri poteſt, cadat intra, ut A C. Quoniam igitur in coni ſectione ſumptum eſt quodlibet punctum C: linea, quæ ab ipſo C intra ſectionem ducitur, ordinatim applicatæ æquidiſtans, diametro occurrit, atque ab ipſa bifariam ſecatur. quare A C producta bifariam ſecabitur à linea A B, quod eſt abſurdum: quoniam producta extra ſectionem cadit. non igitur recta linea, quæ à puncto A ducitur ordinatim applicatæ æquidiſtans, cadet intra ſectionem. ergo extra cadet: & propterea ſectionem ipſam neceſſariò continget.

7. huiu.



E V T O C I V S.

EVCLIDES in quinto decimo theoremate tertij libri elementorum oſtendit lineam, quæ ab extremitate diametri ad rectos angulos ducitur, cadere extra; atque circulum ipſum contingere: Apollonius autem hoc loco univerſale quoddam demonſtrat; quod tum tribus coni ſectionibus, tum circulo convenire poteſt. hoc enim differt circulus à coni ſectionibus; quòd in circulo ordinatim applicatæ perpendiculares ſunt ad diametrum; ne-

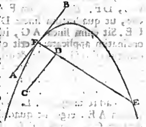
que

quæ enim alia linea ipſis æquidiſtantes à diametro circuli biſariam dividuntur : at in tribus ſectionibus non omnino perpendiculares ducuntur, præterquam ad ſolos axes.

THEOREMA XVIII. PROPOSITIO XVIII.

SI recta linea coni ſectioni occurrens, productaque in utranque partem extra ſectionem cadat; ſumatur autem aliquod punctum intra ſectionem, & per ipſum ei, quæ ſectioni occurrit, æquidiſtans ducatur: ducta linea, & producta ex utraque parte, ſectioni occurret.

SIT coni ſectio, atque ipſi occurrens recta linea A F B, quæ producta in utranque partem extra ſectionem cadat: ſumpto autem intra ſectionem puncto aliquo C; per C ipſi A B æquidiſtans ducatur C D. Dico C D productam ex utraque parte ſectioni occurrere. Sumatur enim aliquod punctum in ſectione, quod ſit E; & iungatur E F. Quoniam igitur linea AB lineæ CD æquidiſtat, ipſique A B occurrit recta linea E F. & C D producta ipſi E F occurret. & ſiquidem cadet inter E, F punctum, perſpieuum eſt ipſam ſectioni occurrere: ſi verò extra E, ſectioni prius occurret. ergo C D producta, ut ad partes D E, occurrit ſectioni. ſimiliter demonſtrabitur, & ad partes A F eidem occurrere. linea igitur C D producta ex utraque parte ſectioni occurret. 1. primi libri Vitellionis.



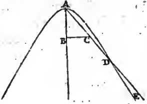
EVTOCIVS.

IN aliquibus exemplaribus hoc theorema in parabola, & hyperbola tantummodo propoſitum oſtendit : ſed tamen præſtat propoſitionem univerſaliorem eſſe; quanquam de ellipſi, ut minimè dubium, ab illis prætermiſſum videri poteſt; linea enim C D intra ſectionem terminatam exiſtens, ſi producatur ex utraque parte, neceſſariò ipſam ſecabit. Sciendum autem eſt, eandem congruere demonſtrationem, etiamſi linea A F B ſecet ipſam ſectionem.

THEOREMA XIX. PROPOSITIO XIX.

IN omni ſectione coni recta linea, quæ à diametro ducitur ordinatim applicatæ æquidiſtans, cum ſectione conveniet.

SIT coni ſectio, cuius diameter A B: ſumaturque aliquod punctum B in diametro; & per B ducatur B C æquidiſtans ei, quæ ordinatim applicata fuerit. Dico B C productam cum ſectione convenire. Sumatur enim quodlibet punctum in ſectione D. eſt autem & punctum A in ſectione. ergo à puncto A ad D ducta linea intra ſectionem cadet. 10. huius. Quoniam igitur, quæ ab A ducta eſt ordinatim applicatæ æquidiſtans, cadit extra ſectionem; 17. huius. & cum ipſa convenit A D; itèque B C æquidiſtat ei, quæ ordinatim applicata eſt:



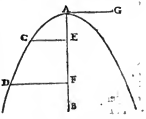
 ſequi-

ſequitur, ut BC etiam cum AD conveniat. & ſiquidem convenit inter puncta A,D; perſpicuum eſt cum ſectione quoque convenire: ſi verò extra D, ut ad punctum E, priùs conveniet cum ſectione. ergo recta linea, quæ à puncto B ducitur ordinatim applicatæ æquidiſtans, cum ſectione conveniet.

THEOREMA XX. PROPOSITIO XX.

SI in parabola duæ rectæ lineæ à ſectione ad diametrum ordinatim applicentur: ut eorum quadrata inter ſeſe, ita erunt & lineæ, quæ ab ipſis ex diametro ad verticem abſcinduntur.

SIT parabole, cuius diameter AB: & in ipſa ſumantur puncta quæpiam C,D; à quibus ad AB ordinatim applicentur CE, DF. Dico lineam FA ad ipſam AE ita eſſe, ut quadratum lineæ DF ad quadratum CE. Sit enim linea AG, iuxta quam poſſunt ordinatim applicatæ: erit quadratum DF re-
11. huius. ctangulo FAG æquale; & quadratum CE æquale rectangulo EAG. quare ut quadratum DF ad quadratum CE, ita rectangulum FAG ad rectangulum EAG. ut autem rectangulum FAG ad rectangulum EAG, ita linea FA ad
1. ſexti. lineam AE. ergo ut quadratum DF ad quadratum CE, ita erit FA ad AE.



EVTOCIVS.

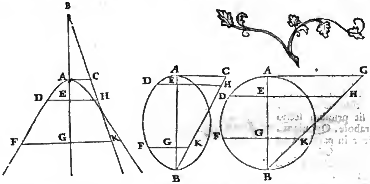
AB hoc theoremate incipiens Apollonius deinceps in omnibus accidentia, quæ ipſi parabolæ inſunt, & non alij cuipiam, magna ex parte oſtendit: deinde hyperbolæ, ellipſi, & circulo eadem ineſſe demonſtrat. Quoniam autem non inutile viſum eſt ijs, qui mechanica tradunt, ob inſtrumentorum penuriam, ſæpenumero per continuata puncta coni ſectiones in plano deſcribere: ex hoc theoremate ſuppeditatur modus ſumendi ea puncta continuata, per quæ parabole regulæ adminiculo deſignatur. ſi enim exponamus rectam lineam, ut AB; & in ea ſumamus puncta continuata E, F; à quibus ad rectos angulos ipſi AB lineas EC, FD ducamus: ſumpto in linea EC quolibet puncto C; longiùs quidem ab E, ſi latiorem parabolam facere libuerit; ſi verò anguſtiorem propiùs; & fiat ut AE ad AF, ita quadratum EC ad quadratum FD; puncta C, D in ſectione erunt. ſimiliter autem ſumentur & alia puncta, per quæ parabole ipſa deſcribetur.

THEOREMA XXI. PROPOSITIO XXI.

SI in hyperbola, vel ellipſi, vel circuli circunferentia, rectæ lineæ ordinatim ad diametrum applicentur: erunt quadrata earum ad ſpatia contenta lineis; quæ inter ipſas, & vertices tranſverſi lateris figuræ interijciuntur, ut figuræ rectum latus ad tranſverſum; inter ſeſe verò, ut ſpatia, quæ interiectis, ut diximus, lineis continentur.

SIT hyperbole, vel ellipſis, vel circuli circunferentia, cuius diameter AB; linea autem, iuxta quam poſſunt applicatæ, AC; & ad diametrum applicentur ordi-

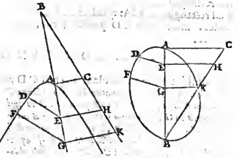
ordinatim D E, F G. Dico ut quadratum F G ad rectangulum A G B, ita eſſe lineam A C ad A B: ut verò quadratum F G ad quadratum D E, ita rectangulum A G B ad rectangulum A E B. Iungatur enim B C figuram determinans; & per E,G puncta ipſi A C æquidiſtantes ducantur E H, G K. quadratum igitur F G æquale eſt rectangulo K G A, & quadratum D E rectangulo H E A. 12.huius.
Quoniam autem ut K G ad G B, ita eſt C A ad A B. & ut K G ad G B, ſumpta 4.ſexti. 1.ſexti.



A G communi altitudine, ita rectangulum K G A ad rectangulum B G A; erit ut C A ad A B, ita rectangulum K G A, hoc eſt quadratum F G ad rectangulum B G A. Eadem ratione demonſtrabitur etiam, ut quadratum D E ad rectangulum B E A, ita C A ad A B. ergo ut quadratum F G ad rectangulum B G A, ita quadratum D E ad B E A rectangulum: & permutando ut quadratum F G ad quadratum D E, ita rectangulum B G A ad rectangulum B E A. 11.quinti

E V T O C I V S.

THEOREMA manifeſtè exponitur, & caſum non habet. oportet autem ſcire lineam, iuxta quam poſſunt, videlicet rectum figuræ latus in circulo quidem diametro æquale eſſe. Quoniam enim C A ad A B eſt, ut quadratum D E ad rectangulum A E B, quadratum autem D E rectangulo A E B in circulo duntaxat eſt æquale; ſequitur, ut & C A æqualis ſit ipſi A B. Sed illud quoque attendendum eſt, lineas, quæ in circuli circunferentia ordinatim applicantur, ad diametrum perpendiculares eſſe, atque in eadem recta linea, in qua ſunt æquidiſtantes ipſi A C. Per hoc autem theorema, eo modo, quo dictum eſt in parabola, hyperbolen, & ellipſim



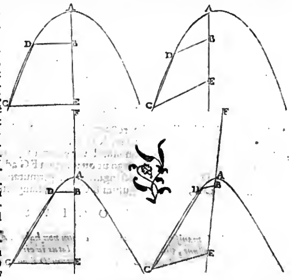
regula adminiculo deſcribemus. Exponatur enim recta linea A B, & in infinitum producatur ad G; à puncto autem A ad rectos angulos ipſi A B ducatur A C; iunctaque B C, & producta, ſumantur in linea A G puncta quædam E, G; à quibus ipſi A C æquidiſtantes ducantur E H, G K: & fiat A G K rectangulum æquale quadrato F G; & rectangulum

gulum A E H æquale ipſi D E quadrato. tranſibit iam hyperbole per puncta A, D, F. Similiter eadem & in ipſa ellipſi conſtruemus.

THEOREMA XXII. PROPOSITIO XXII.

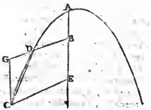
SI parabolen, vel hyperbolen recta linea in duobus punctis ſecet, non conueniens cum diametro ſectionis intra ſectionem: producta cum eadem diametro extra ſectionem conueniet.

SIT parabole, vel hyperbole, cuius diameter A B: & ſecet quæpiam recta linea ſectionem in duobus punctis C, D. Dico lineam C D productam conuenire cum ipſa A B extra ſectionem. Applicentur enim a pũctis C, D ordinatĩ lineæ C E, D B; & ſit primùm ſectio parabole. Quoniam igitur in parabola ut quadratũ C E ad quadratum D B, ita eſt E A ad A B. maior autẽ E A, quàm A B. erit quadratum C E quadrato D B maius. quare & linea C E maior ipſa D B: & ſunt inter ſeſe æquidiſtantes. ergo C D producta cũ diametro A B extra ſectionem conueniet. ſed ſit ſectio hyperbole. itaque quoniã in hyperbola ut quadratũ C E ad quadratum D B, ita rectangulum F E A ad rectangulum F B A: quadratum C E maius erit quadrato D B. & ſunt æquidiſtantes. linea igitur C D producta cum diametro ſectionis extra ſectionem conueniet.



FED. COMMANDINVS.

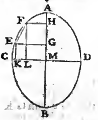
A ET ſunt inter ſeſe æquidiſtantes. ergo C D producta cum diametro A B extra ſectionem conueniet.) *Ducatur à puncto C linea C G diametro E B æquidiſtans: & producta B D ipſi C G occurrat in G. Quoniam igitur C E, D B inter ſeſe æquidiſtant; itẽque E B, C G: erit ipſum E G parallelogrammum;* (29. primi.) *& anguli B E C, E C G æquales duobus rectis. quare B E C, E C D anguli duobus rectis ſunt minores. linea igitur C D cum ipſa E A ex parte A conueniet. quòd cùm non conueniat intra ſectionem, extra conuenire neceſſarium eſt.*



THEO-

THEOREMA XXIII. PROPOSITIO XXIII.

SI ellipſim recta linea ſecet inter duas diametros: producta cum utraque earum extra ſectionem conveniet.



SIT ellipſis, cuius diametri A B, C D: & ſecet quædam recta linea ſectionem, videlicet ipſa E F, inter duas diametros A B, C D interiecta. Dico E F productam convenire cum utraque earum extra ſectionem. Applicentur enim à punctis E, F, ordinatim ad diametrum quidem A B, lineæ E G, F H: ad C D verò E K, F L. eſt igitur ut quadratum E G ad quadratum F H, ita rectangulum B G A ad rectangulum B H A: ut autem quadratum F L ad quadratum E K, ita rectangulum D L C ad rectangulum D K C. atque eſt rectangulum B G A maius rectangulo B H A: etenim G propiùs accedit ad punctum, quod diametrum A B bifariam ſecat; & rectangulum DLC maius eſt rectangulo D K C. quadratum igitur E G maius eſt quadrato F H; & quadratum F L maius quadrato E K: iccircoque linea E G maior, quàm ipſa F H; & F L maior, quàm E K. æquidiſtat autem E G ipſi F H, itéque F L ipſi E K. ergo E F producta cum utraque diametro A B, C D extra ſectionem conveniet. 21. huius.

EVTOCIVS.

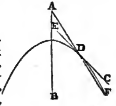
ATTENDENDVM eſt in propoſitione Apollonium duas diametros dicere, non ſimpliciter quaſcunque, ſed quæ coniugatæ diametri appellantur; quarum utraque ordinatim applicatæ æquidiſtans ducitur, mediãque proportionem habet inter latera figuræ alterius diametri: & iccirco alteri æquidiſtantes lineas bifariam dividit; ut in theoremate eſt demonſtratum. niſi enim ita ſit, continget lineam inter duas diametros intermediam alteri ipſarum æquidiſtare: quod non ponitur. Quoniam autem G propiùs accedit ad punctum M, quod A B bifariam ſecat, quàm ipſum H, rectangulum quidem B G A unà cum quadrato G M æquale eſt quadrato A M; rectangulum verò B H A unà cum quadrato H M eidem eſt æquale; & quadratum H M maius quadrato G M; erit rectangulum B G A rectangulo B H A maius. Coniugatæ diametri 16. huius. 5. ſecundi.

FED. COMMANDINVS.

HOC idem etiam in ipſo circulo evenit, ſumptis duabus diametris coniugatis: quod eodem prorſus modo demonſtrabitur.

THEOREMA XXIV. PROPOSITIO XXIV.

SI parabolæ, vel hyperbolæ recta linea in uno puncto occurrens, & producta ex utraque parte extra ſectionem cadat: cum diametro conveniet.



SIT parabole, vel hyperbole, cuius diameter AB: occurratque ipſi recta linea C D E in puncto D; & producta ex utraque parte extra ſectionem cadat. Dico lineam C D E cum diametro A B convenire. Sumatur enim aliquod punctum F in ſectione, & iungatur D F. ergo D F producta conveniet cum diametro ſectionis. conveniat in A puncto, 22. huius.

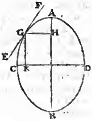
eſt

Digitized by Google

eſt autem C D E inter ſectionem & lineam F D A. linea igitur C D E producta cum diametro extra ſectionem conveniet.

THEOREMA XXV. PROPOSITIO XXV.

SI ellipſi recta linea occurrens inter duas diametros, & producta ex utraque parte cadat extra ſectionem: cum utriſque diametris conveniet.



SIT ellipſis, cuius diametri A B, C D: & ipſi occurrat recta linea E F inter duas diametros in puncto G; & producta ex utraque parte extra ſectionem cadat. Dico E F cum utriſque diametris A B, C D convenire. Applicentur enim à puncto G ad diametros A B, C D lineæ G H, G K. Itaque quoniam G K æquidiſtat ipſi A B: convenit autem quædam linea G F cum G K, & cum ipſa A B conveniet. Eodem modo & F E cum diametro C D convenire demonſtrabitur.

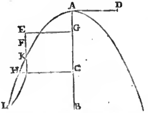
ex 2. primi libri Vitellionis.

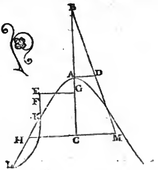
THEOREMA XXVI. PROPOSITIO XXVI.

SI in parabola, vel hyperbola recta linea ducatur diametro ſectionis æquidiſtans: in uno tantùm puncto cum ſectione conveniet.

SIT primùm parabole, cuius diameter A B C; rectum autem latus A D: & ipſi A B æquidiſtans ducatur E F. Dico E F productam cum ſectione convenire. Sumatur enim in ipſa E F aliquod punctum E; à quo ducatur E G ordinatim applicatæ æquidiſtans: & quadrato E G maius ſit rectangulum D A C; à puncto autem C ordinatim applicetur C H. ergo quadratum H C æquale eſt rectangulo D A C. atque eſt rectangulum D A C maius quadrato E G. quadratum igitur H C qua-

11. huius.





drato E G maius erit: & iccirco linea H C maior linea E G. & ſunt æquidiſtantes inter ſeſe. ergo E F producta ſecabit H C: propterea que conveniet cum ſectione. conveniat in K. Dico in uno tantùm puncto K convenire. ſi enim fieri poteſt, conveniat etiam in L. Quoniam igitur parabolen recta linea ſecat in duobus punctis, ſi producatur conveniet cum diametro ſectionis; quod eſt abſurdum. poſitum enim eſt ipſi æquidiſtare. ergo E F in uno tantùm puncto cum ſectione conveniet. Sit dein-

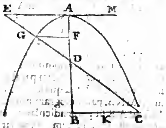
22. huius.

deinde ſectio hyperbole; tranſverſum verò figuræ latus A B, & A D rectum: iungaturque B D, & producatur. iiſdem igitur, quæ ſupra, diſpoſitis, ducatur à puncto C ipſi A D æquidiſtans C M. & quoniam rectangulum M C A maius eſt rectangulo D A C; ipſique M C A æquale eſt quadratum C H; & D A C rectangulũ maius quadrato G E: erit & quadratum C H quadrato G E maius; & ideo linea C H maior linea G E. ex quibus eadem, quæ ſupra diximus, neceſſariò ſequuntur. 11. huius.

THEOREMA XXVII. PROPOSITIO XXVII.

SI parabolæ diametrum ſecet recta linea: producta in utranque partem cum ſectione conveniet.

SIT parabole, cuius diameter A B: & ipſam AB ſecet quæpiam recta linea C D intra ſectionem. Dico C D productam in utranque partem cum ſectione convenire. Ducatur enim à puncto A ordinatim applicatæ æquidiſtans A E. ergo A E extra ſectionem cadet. 17. huius. itaque vel C D ipſi A E æquidiſtat, vel non. & ſiquidem æquidiſtat, ordinatim applicata eſt. quare producta in utranque partem conveniet cum ſectione. 19. huius. quòd ſi non æquidiſtat, producatur, & conveniat cum A E in E puncto. conſtat igitur ipſam cum ſectione convenire ad partes E. ſi enim convenit cum A E, multò priùs ſectioni occurrit. Dico rurſus eandem, & ad alteras partes productam, convenire cũ ſectione. Sit enim M A linea iuxta quam poſſunt; & G F ordinatim applicetur: quadratum autem A D æquale ſit rectangulo B A F; & ordinatim applicata B K conveniat cum D E in C puncto. Quoniam igitur rectangulum F A B æquale eſt quadrato A D: erit ut B A ad A D, ita D A ad A F. 14. ſexti. quare & reliqua B D ad reliquam D F, ut B A ad A D: 19 quinti & propterea ut quadratum B D ad quadratum D F, ita quadratum B A ad quadratum A D. 22. ſexti. cor. 20. ſexti. Rurſus quoniam quadratum A D æquale eſt rectangulo B A F: ut B A ad A F, ſic erit quadratum B A ad quadratum A D, 4 & 22. ſexti. hoc eſt quadratum B D ad quadratum D F. ut autem quadratum B D ad quadratum D F, ſic quadratum B C ad quadratum F G: 1. ſexti. & ut B A ad A F, ſic rectangulum B A M ad rectangulum F A M. 11. quinti. ut igitur quadratum B C ad quadratum F G, ita rectangulum B A M ad ipſum F A M: & permutando ut quadratum BC ad rectangulum BAM, ita quadratum FG ad rectangulum FAM. at quadratum F G æquale eſt F A M rectangulo, propter ſectionem. 11. huius. ergo & quadratum B C rectangulo B A M æquale erit. 14. quinti. eſt autem AM rectum figuræ latus, & B C ordinatim applicata. ſectio igitur tranſit per C punctum: & linea CD in C cum ſectione neceſſariò convenit.



EVTOCIVS.

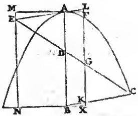
IN aliquibus exemplaribus vigeſimi ſeptimi theorematis talis legitur demonſtratio.

SIT parabole, cuius diameter A B: & hanc ſecet recta linea quædam G D intra ſectionem. Dico G D productam ad utraſque partes cum ſectione convenire. Ducatur enim per A punctum, ordinatim applicatæ æquidiſtans, quæ ſit A E. ergo A E cadet extra ſectionem. 17. huius. vel igitur G D ipſi A E æquidiſtat, vel non. & ſiquidem æquidiſtet, ordinatim applicata eſt; ideoque ſi producatur ad utraſque partes,

tes, bifariam ſecta à diametro conveniet cum ſectione: ſi verò non æquidiſtet, ſed producta conveniat cum A E in E puncto; perſpicuum eſt ipſam cum ſectione convenire ad partes E; nam ſi cum A E convenit, multò priùs ſectioni occurrat neceſſe eſt. Dico etiam ad alteras partes productam cum ſectione convenire. Sit enim M A linea, iuxta quam poſſunt: & in rectum ipſi producatur A F. ergo M A ad A B

A eſt perpendicularis. Fiat ut quadratum A E ad triangulum A E D, ſic linea M A ad A F: & per puncta M, F ipſi A B æquidiſtan-

B tes ducantur F G K, M N. Cùm igitur quadrilaterum ſit L A D G, & poſitione data L A: ducatur C K B ipſi L A æquidiſtans, quæ abſcindat C K G triangulum quadrilatero L A D G æquale; & per B ipſi F A M æquidiſtans ducatur X B N. Itaque quoniam ut quadratum A E ad triangulum A E D, ita eſt linea M A ad A F; & ut quadratum A E ad AED triangulum, ita quadratum C B ad triangulum D C B, etenim A E, C B inter ſe æquidiſtant; & ipſas coniungunt C E, A B; ut



autem M A ad A F, ita A M N B parallelogrammum ad parallelogrammum A F X B: erit ut quadratum C B ad triangulum C D B, ita A M N B parallelogrammum ad parallelogrammum A F X B; & permutando ut quadratum C B ad parallelogrammum A M N B, ita C D B triangulum ad parallelogrammum A F X B. parallelogrammum autem A F X B triangulo C D B eſt æquale; quoniam enim C G K triangulum æquale eſt quadrilatero A L D G; & quadrilaterum G D B K utrique commune: erit L A B K parallelogrammum æquale triangulo C D B. ſed L A B K parallelogrammum æquale eſt parallelogrammo F A B X: quòd ſit in eadem baſi A B, & in eiſdem parallelis A B, L X. ergo C D B triangulum parallelogrammo X F A B æquale erit. quare & quadratum C B æquale parallelogrammo AMNB. parallelogrammum autem M A B N rectangulo M A B æquale: quòd MA ad A B ſit perpendicularis. ergo rectangulum MAB eſt æquale quadrato CB. atque eſt M A rectum figuræ latus, A B diameter, & C B ordinatim applicata, cùm ipſi A E æquidiſtet. ex quibus ſequitur punctum C eſſe in ſectione. ergo D G C in C cum ſectione convenit. quod demonſtrandum proponebatur.

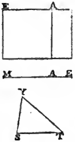
EIVSDEM COMMENTARIVS IN PROPOSITVM THEOREMA.

A FIAT ut quadratum A E ad triangulum A E D, ſic linea M A ad A F.) *Demonſtratum eſt hoc in commentarijs in undecimum theorema. ſi enim deſcribentes quadratum lineæ A E, ipſius lateri appoſuerimus ſpatium triangulo A E D æquale: factum iam erit, quod quærebamus.*

B Cùm igitur quadrilaterum ſit L A D G, & poſitione data L A: ducatur C K B ipſi L A æquidiſtans, quæ abſcindat C K G triangulum quadrilatero L A D G æquale.] *Hoc ita faciemus. ſi enim,*

25. ſexti. *ut in elementis didicimus, dato rectilineo, videlicet quadrilatero L A D G æquale, & triangulo dato A E D ſimile conſtituerimus triangulum S T Y, ita ut latus S T lateri A D reſpondeat; & fecerimus G K ipſi S T æqualem, & T Y æqualem G C: iuncta linea C K, factum erit, quod quæritur. Quoniam enim angulus ad T æqualis eſt angulo ad D, hoc eſt ei, qui ad G: erit triangulum C G K æquale, ac ſimile triangulo S T Y, & angulus C angulo E æqualis; qui quidem al-*

27. primi *terni ſunt. linea igitur C K æquidiſtat ipſi A E. conſtat autem lineam M A tangere ſectionem, quando A B ſit axis: alioquin ipſam ſecat; & omnino ad diametrum perpendicularis ducitur.*

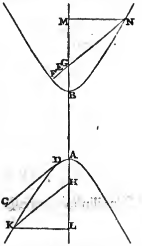


THEO-

THEOREMA XXVIII. PROPOSITIO XXVIII.

Si recta linea unam oppoſitarum ſectionum contingat; ſumatur autem punctum intra alteram ſectionem; & per ipſum linea contingenti æquidiſtans ducatur: producta ad utraſque partes cum ſectione conveniet.

SINT oppoſitæ ſectiones, quarum diameter A B: & ſectionem, in qua eſt A, contingat quædam recta linea C D: ſumatur autem aliquod punctum E intra alteram ſectionem; & per E ducatur E F ipſi C D æquidiſtans. Dico lineam E F productam ad utraſque partes cum ſectione convenire. Quoniam enim oſtenſum eſt lineam C D productam convenire cum diametro A B. atque eſt E F ipſi æquidiſtans. 24. huius. linea E F producta cum diametro conveniet. conveniat autem in G; & ipſi G B æqualis ponatur A H: deinde per H ducatur H K æquidiſtans E F; & ipſa K L ordinatim applicata, ponatur G M æqualis L H; ducaturque M N ordinatim applicatæ æquidiſtans; & G N in directum producatur. Itaque quoniam K L ipſi M N æquidiſtat; & K H ipſi G N; & eſt L M una eademque recta linea: triangulum K H L ſimile eſt triangulo GMN. eſt autem L H æqualis G M. quare & K L ipſi M N æqualis erit: ideoque quadratum K L æquale quadrato M N. Rurſus quoniam L H æqualis eſt G M, & A H ipſi B G; communis autem A B: erit B L æqualis A M; & propterea rectangulum B L A rectangulo A M B æquale. ut igitur rectangulum B L A ad quadratum K L, ita rectangulum A M B ad quadratum M N. ſed ut rectangulum 21. huius. B L A ad K L quadratum, ita tranſverſum figuræ latus ad latus rectum. quare ut rectangulum A M B ad quadratum M N, ita erit latus tranſverſum ad rectum. ex quibus colligitur, punctum N in ſectione eſſe. ergo linea E F producta in puncto N cum ſectione conveniet. Similiter oſtendemus, ſi ex altera parte producatur, cum ſectione convenire.



EVTOCIVS.

QVOD ſi C D hyperbolen ſecet, eadem nihilominus ſequentur, quemadmodum in decimo octauo theoremate.

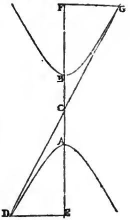
THEOREMA XXIX. PROPOSITIO XXIX.

Si in oppoſitis ſectionibus recta linea per centrum ducta occurrat uni ſectioni: ulteriùs producta alteram quoque ſecabit.

Sint ſectiones oppoſitæ, quarum diameter A B, centrum autem C: & linea C D ſectionem A D ſecet. Dico ipſam C D alteram quoque ſecare. Ordinatim

enim

enim applicetur D E; ipſique A E ponatur æqualis B F: & F G ordinatim ducatur. Quoniam igitur E A, B F æquales ſunt, & A B utriſque communis; rectangulum B E A rectangulo A F B eſt æquale. & quoniam ut rectangulum B E A ad quadratum D E, ita eſt tranſverſum latus ad rectum. ut autem rectangulum A F B ad quadratum F G, ita latus tranſverſum ad rectum. ergo ut rectangulum B E A ad quadratum D E, ſic rectangulum A F B ad F G quadratum. ſed æquale eſt rectangulum B E A rectangulo A F B. quadratum igitur D E quadrato F G eſt æquale. Quòd cùm linea EC æqualis ſit C F,& DE ipſi F G; ſitque recta linea E F, & E D ipſi F G æquidiſtans:
D erit & D G recta linea. ergo C D ſectionem quoque alteram ſecabit.



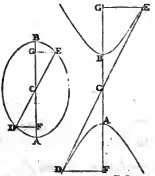
FED. COMMANDINVS.

D ERIT & D G recta linea.] *Sequitur enim ex iam dictis triangulum C D E triangulo C G F ſimile eſſe; angulumq; D C E angulo G C F æqualem. ſed cùm E F recta*
13.primi. *linea ſit; anguli G C F, G C E duobus rectis ſunt æquales, itemque anguli D C E, D C F.*
ergo & reliqui G C E, D C F inter ſe æquales erunt: & iccirco G C F, F C D æqua-
14.primi. *les duobus rectis. quare D G recta linea ſit neceſſe eſt.*

THEOREMA XXX. PROPOSITIO XXX.

Si in ellipſi, vel oppoſitis ſectionibus recta linea ducatur, ad utraſq; centri partes ſectioni occurrens: ad centrum bifariam ſecabitur.

SIT ellipſis, vel oppoſitæ ſectiones, quarum diameter A B, centrum C: & per C ducatur recta linea D C E. Dico CD ipſi C E æqualem eſſe. Ordinatim enim
21.huius. applicentur D F, E G. Et quoniam ut rectangulum B F A ad quadratum F D, ita eſt tranſverſum latus ad rectum; & ut rectangulum AGB ad quadratum GE, ita latus tranſverſum ad rectum: erit ut rectangulum B F A ad quadratum F D, ita rectangulum A G B ad quadratum G E; & permutando ut rectangulum B F A ad rectangulum A G B, ita D F quadratum ad quadratum G E. ut autem quadratum D F ad quadratum G E, ita quadratum F C ad ipſum C G quadratum. ergo permutando ut rectangulum B F A ad quadratum F C, ita rectangulum A G B ad quadratum C G. ut
A igitur in ellipſi componendo, in oppoſitis verò convertendo; & per converſionem rationis, quadratum A C ad quadratum C F, ſic quadratum B C ad quadratum C G: & permutando. quadratum autem A C æquale eſt quadrato CB. ergo & quadratum F C quadrato



drato

drato C G æqualæ erit; iccircoque linea F C lineæ C G æqualis: & cùm D F, G E inter ſe æquidiſtent; neceſſe eſt lineam D C ipſi C E æqualem eſſe. B

EVTOCIVS.

Vt igitur in ellipſi componendo; in oppoſitis verò convertendo, & per converſionem rationis.] *In ellipſi quidem ita dicemus. Quoniam ut rectangulum A F B ad quadratum D F, ita eſt rectangulum A G B ad quadratum G E. ut autem quadratum D F ad quadratum F C, ita quadratum E G ad quadratum G C. erit ex æquali ut rectangulum A F B ad quadratum F C, ita rectangulum A G B ad quadratum G C: & componendo ut rectangulum A F B vnà cum quadrato F C ad quadratum F C, hoc eſt quadratum A C ad quadratum C F [etenim recta linea A B ſecatur in partes æquales ad punctum C, & in partes inæquales ad F] ita rectangulum A G B unà cum quadrato G C ad quadratum G C, hoc eſt propter eandem cauſam, quadratum B C ad C G quadratum: & permutando ut quadratum A C ad quadratum C B, ita F C quadratum ad quadratum C G. At verò in oppoſitis hoc modo. Quoniam ex æquali eſt ut rectangulum B F A ad quadratum F C, ita rectangulum A G B ad C G quadratum: erit convertendo ut quadratum F C ad rectangulum B F A, ita quadratum C G ad rectangulum A G B; & per converſionem rationis, ut quadratum F C ad quadratum C A, ita quadratum G C ad C B quadratum. nam cùm linea A B bifariam ſecetur in C; atque ei adijciatur F A: erit rectangulum B F A unà cum quadrato A C æquale quadrato C F. quare C F quadratum exuperat rectangulum B F A, ipſo A C quadrato. pulchre igitur dictum eſt ſequi illud per converſionem rationis.*

5. ſecũdi.
6. ſecũdi.

FED. COMMANDINVS.

ET cùm D F, G E inter ſe æquidiſtent; neceſſe eſt lineam DC ipſi C E æqualem eſſe.) *Quoniam enim æquidiſtant D F, G E; ſequitur angulum C F D æqualem eſſe angulo C G E; & propterea triangulum C D F triangulo C E G ſimile. ergo ut FC ad C D, ita G C ad C E: & permutando ut F C ad C G, ita D C ad C E. æquales autem ſunt F C, C G, ut demonſtratum eſt. ergo & D C, C E æquales erunt.* B

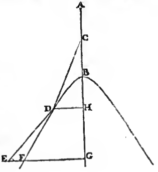
THEOREMA XXXI. PROPOSITIO XXXI.

SI in tranſverſo figuræ latere hyperboles ſumatur aliquod punctum, non minorem abſcindens ad verticem ſectionis, quàm ſit dimidia tranſverſi lateris figuræ; & ab ipſo recta linea ſectioni occurrat: ſi producatur, intra ſectionem ad ſequentes ipſius partes cadet.

SIT hyperbole, cuius diameter A B: & in ipſa ſumatur punctum aliquod C, non minorem abſcindens lineam C B, quàm ſit ipſius A B dimidia; & occurrat ſectioni quædam recta linea C D. Dico C D productam intra ſectionem cadere. Si enim fieri poteſt, cadat extra ſectionem, ut C D E; & à quovis puncto E ordinatim applicetur E G, itemque ipſa D H: ſit autem primùm linea A C æqualis C B. Itaque quadratum E G ad quadratum D H maiorem proportionem habet, quàm quadratum F G ad quadratũ D H. ut autem quadratum E G ad D H quadratum, ſic quadratum G C ad quadratum C H; propterea quòd E G ipſi D H 8. quinti. 4. & 12. ſexti.

Digitized by Google

ſit æquidiſtans: & ut quadratum F G ad quadratum D H, ſic rectangulum A G B ad rectangulum A H B, propter ſectio-
27.quinti elemento rum apud Campanum nem. quadratum igitur G C ad quadratum C H proportionem maiorem habet, quam rectangulum A G B ad rectangulum A H B: & permutando quadratum G C ad rectangulum
29. eiuſdē A G B habet maiorem proportionem, quàm
A quadratum C H ad rectangulum A H B. ergo diuidendo quadratum C B ad rectangulum A G B maiorem habet proportionem, quàm quadratum C B ad rectangulum A H B. quod fie-
B ri non poteſt. non igitur linea C D E cadet ex-
C tra ſectionem. quare intra cadet: & iccirco quæ ab alio puncto lineæ A C ad ſectionem ducitur, multò magis cadet intra, quoniam & intra lineam C D cadet.



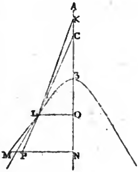
E V T O C I V S.

A ERGO diuidendo quadratum C B ad rectangulum A G B maiorem habet proportionē, quàm quadratum C B ad rectangulum A H B.) *Quoniam enim recta linea*
6.ſecundi *A B bifariam ſecatur in C; & ipſi adiicitur linea B G: rectangulum A G B unà cum quadrato C B æquale eſt quadrato C G. ergo C G quadratum ſuperat rectangulum A G B quadrato C B: & propter eandem cauſam quadratum C H ſuperat rectangulum A H B ipſo C B quadrato. rectè igitur Apollonius dixit, diuidendo illud concludi.*

FED. COMMANDINVS.

B Quod fieri non poteſt.] *Quadratum enim C B ad rectangulum A H B maiorem*
1. quinti. *proportionem habet, quàm ad rectangulum A G B: quippe cùm rectangulum A G B ipſo A H B maius ſit.*

C Et iccirco quæ ab aliquo puncto lineæ A C ad ſectionem ducitur, multò magis cadet intra.] *Sumatur enim in linea A C punctum K, à quo ducta K L ad ſectionem producatur in M. Dico lineam K L M multò magis intra ſectionem cadere. Si enim fieri poteſt cadat extra, ordinatimque applicentur M N, L O; & iuncta C L producatur, ut ſecet M N in P: cadet C L P intra ſectionem ex iis, quæ proximè demonſtrata ſunt. Itaque quoniam lineæ M N, L O æquidiſtant: erunt triangula L K O, M K N ſimilia; & ſimilia inter ſe L C O, P C N. ſed trianguli L K O angulus K L O maior eſt angulo C L O trianguli L C O. ergo & angulus K M N angulo C P N*
16 & 32. primi elemētorum *maior erit, interior exteriore, quod fieri non poteſt. At ſi ponatur L M cadere quidem intra ſectionem, ſed extra lineam L P, vel in ipſam: nihilominus abſurdum ſequetur. conſtat ergo lineam K L M multò magis, quàm C L P intra ſectionem cadere. quod quidem demonſtrandum proponebatur.*



C O R O L L A R I V M.

Ex iam demonſtratis ſequitur lineam, quæ hyperbolen contingit, ſi produca-

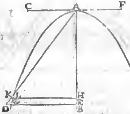
duca-

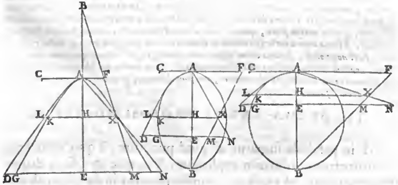
ducatur, ſecare diametrum inter verticem & centrum ſectionis.

THEOREMA XXXII. PROPOSITIO XXXII.

SI per verticem ſectionis coni recta linea ordinatim applicatæ æquidiſtans ducatur, ſectionem continget: & in locũ, qui inter coni ſectionem & rectam lineam interijcitur, altera recta linea non cadet.

SIT coni ſectio prius parabole, cuius diameter A B; & à puncto A ducatur A C ordinatim applicatæ æquidiſtans: cadet linea A C extra ſectionem, quod ſupra demonſtratum eſt. Dico in locum, qui inter lineam A C & ſectionem interijcitur, 17. huius. alteram rectam lineam non cadere. Si enim fieri poteſt, cadat, ut A D; ſumaturque in ipſa quodvis punctum D; & ordinatim applicetur D E: ſit autem linea A F, iuxta quam poſſunt, quæ à ſectione ordinatim ducuntur. & quoniam quadratum DE ad quadratum E A maiorem proportionem habet, quàm quadratum G E 8. quinti. ad E A quadratum. eſtque quadratum G E æquale rectangulo FAE. quadratum igitur DE ad quadratum EA maiorem proportionẽ habet, quàm rectangulum FAE ad quadratum E A, hoc eſt quàm 11. huius. lemm. 11. decimi. F A ad A E. Itaque fiat ut quadratum DE ad quadratum E A, ſic F A ad A H: & per H ducatur H L K æquidiſtans E D. Quoniam igitur eſt ut quadratum D E ad quadratum E A, ſic linea F A ad ipſam A H, hoc eſt rectangulum F A H ad quadratum A H. & ut quadratum D E ad quadratum E A, ita quadratum K H ad H A quadratum: rectangulo autem F A H æquale eſt quadratum L H. quare ut quadratum K H ad quadratum H A, ſic quadratum L H ad quadratum H A. æqualis eſt igitur linea K H ipſi H L. quod eſt abſurdum. non ergo in locum inter rectam lineam A C & ſectionem altera recta linea cadet. Sit ſectio hyperbole, vel ellipſis, vel circuli circunferentia, cuius diameter A B, & rectum figuræ latus A F: iuncta autem B F producatur;



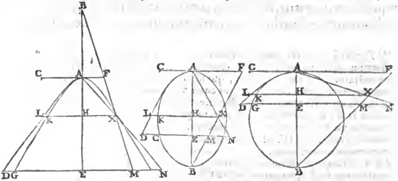


& à puncto A ordinatim applicetur A C, quæ extra ſectionem cadet, ut oſtenſum eſt. Dico in locum, qui inter lineam rectam A C, & ſectionem interijcitur, alteram rectam lineam non cadere. Cadat enim, ſi fieri poteſt, ut A D; & in ipſa

ſumatur quodvis punctum D, à quo D E ordinatim applicetur: & per E ducatur E M ipſi A F æquidiſtans. Et quoniam G E quadratum æquale eſt rectangulo A E M; fiat rectangulum A E N quadrato D E æquale; & iuncta A N ſecet F M in puncto X: deinde per X ipſi F A æquidiſtans ducatur X H; & per H ducatur H K L æquidiſtans A C. Itaque cùm quadratum D E æquale ſit rectangulo A E N: erit ut N E ad E D, ita D E ad E A; & iccirco ut linea N E ad E A, ita

11. & 13. huius.

14. uel 17. ſexti. cor. 20. ſexti.



quadratum D E ad quadratum E A. ſed ut N E ad E A, ita X H ad H A: & ut quadratum D E ad quadratum E A, ita quadratum L H ad H A quadratum. ut igitur X H ad H A, ſic quadratum L H ad quadratum H A. ergo L H media proportionalis eſt inter X H, H A: & propterea quadratum L H æquale rectangulo A H X. eſt autem & quadratum K H rectangulo A H X æquale propter ſectionem. ergo quadratum L H æquale eſt quadrato H K: quod fieri non poteſt. in locum igitur, qui eſt inter rectam lineam A C & ſectionem, altera recta linea non cadet.

E V T O C I V S.

IN ſeptimodecimo theoremate ſimpliciter oſtendit rectam lineam, quæ per verticem ducitur, ordinatim applicatæ æquidiſtans, ſectionem ipſam contingere: hoc autem loco, id quod in elementis circulo tantùm ineſſe demonſtratur, uniuerſè in omni coni ſectione oſtendit. oportet autem ſcire, quod & illic demonſtratum eſt, nullum fortaſſe ſequi abſurdum; ſi linea curva inter ſectionem & lineam rectam cadat: at verò ut cadat recta linea, fieri non poteſt. ſecabit enim ipſa, non continget ſectionem: quoniam duæ rectæ lineæ in eodem puncto contingentes eſſe non poſſunt. Cum autem hoc theorema multifariam demonſtretur in diuerſis editionibus, nos ſimpliciorem, & manifeſtiorem demonſtrationem ſecuti ſumus.

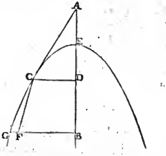
THEOREMA XXXIII. PROPOSITIO XXXIII.

SI in parabola ſumatur aliquod punctum, à quo recta linea ad diametrum ordinatim applicetur; & ei, quæ ab ipſa ex diametro abſcinditur ad verticem, æqualis ponatur in directum ab eius extremitate: recta linea, quæ à facto puncto ducitur ad illud, quod ſumptum fuerat, ſectionem continget.

SIT

SIT parabole, cuius diameter A B; ſumptoque in ea aliquo puncto C, linea C D ordinatim applicetur: & ipſi D E æqualis ponatur E A; & iungatur A C. Dico lineam AC productam extra ſectionem cadere. Si enim fieri poteſt, cadat intra, ut C F: &G B ordinatim applicetur. Itaque quadratum G B ad quadratum CD maiorem proportionem habet, quàm quadratum F B ad quadratum C D. & ut quadratum F B ad quadratum C D, ita quadratum B A ad quadratum A D: ut autem quadratum G B ad C D quadratum, ita linea B E ad E D. ergo B E ad E D maiorem proportionem habet, quàm B A quadratum ad quadratum A D. ſed ut B E ad E D, ita rectangulum B E A quater ſumptum ad rectangulum A E D quater. rectangulum igitur BEA quater ad rectangulum AED quater maiorem habet proportionem, quàm quadratum B A ad quadratum A D: & permutando rectangulum B E A quater ad quadratum A B maiorem proportionem habet, quàm rectangulum A E D quater ad quadratum A D: quod fieri minimè poteſt. nam cùm linea A E ipſi E D ſit æqualis; rectangulum A E D quater ſumptum æquale eſt quadrato A D: rectangulum verò B E A quater ſumptum quadrato B A eſt minus: neque enim punctum E lineam A B bifariam ſecat. linea igitur A C non cadet intra. quare ſectionem ipſam contingat neceſſe eſt.

8. quinti.
A
20. huius.
13. quinti
B
17. quinti apud Câ.
C
D



FED. COMMANDINVS.

A ET ut quadratum F B ad quadratum C D, ita quadratum B A ad quadratum A D.] *Ob ſimilitudinem triangulorum F A B, B A D. quippe cùm ponamus A B F lineam rectam eſſe.*

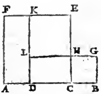
B Sed ut B E ad E D, ita rectangulum B E A quater ſumptum ad rectangulum A E D quater.) *Nam ut B E ad E D, ita rectangulum B E A ad rectangulum A E D. ut autem rectangulum B E A ad rectangulum A E D, ita rectangulum B E A quater ſumptum ad rectangulum A E D itidem quater ſumptum, ex decima quinta quinti elementorum. quare ex undecima eiuſdem conſtat propoſitum.* (1. ſexti.)

C Nam cùm linea A E ipſi E D ſit æqualis; rectangulum A E D quater ſumptum æquale eſt quadrato B D.] *Quadratum enim A D ex quarta ſecundi elementorum æquale eſt quadratis A E, E D, & duobus rectangulis A E D. ſed quadrata A E, E D duobus rectangulis A E D æqualia ſunt, quòd lineæ A C, E D ſint æquales. ergo rectangulum A E D quater ſumptum quadrato A D æquale erit.*

D Rectangulum verò B E A quater ſumptum quadrato B A eſt minus.) *Rurſus enim eadem ratione quadratum B A æquale eſt quadratis B E, E A, & duobus rectangulis B E A. ſed cùm lineæ B E, E A inæquales ſint, duo rectangula B E A minora ſunt quadratis B E, E A, ut mox demonſtrabitur. rectangulum igitur B E A quater ſumptum minus eſt quadrato B A. illud verò nos hoc lemmate demonſtrabimus.*

SI recta linea in partes inæquales ſecetur: earum partium quadrata æqualia ſunt rectangulo, quod bis dictis partibus continetur; & quadrato eius lineæ, qua maior pars ſuperat minorem.

Sece-

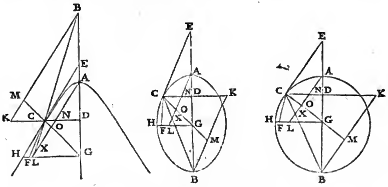


Secetur recta linea A B in partes inæquales in C, ita ut A C maior ſit, quàm C B: & ipſi C B æqualis ponatur A D. Dico quadrata A C, C B æqualia eſſe rectangulo, quod bis A C B continetur, & quadrato lineæ D C, qua ſcilicet A C ipſam C B ſuperat. Conſtituantur enim ex lineis A C, C B quadrata A C E F, C B G H: & per D ducta linea D K, quæ ipſi C E æquidiſtet, producatur G H ad D K in L. Itaque quoniam A D, C B æquales ſunt, & utrique communis D C: erit D B ipſi A C æqualis; ideoque rectangula A K, D G erunt æqualia ei, quod bis A C B continetur. quadratum autem L H E K æquale eſt quadrato lineæ D C. ergo quadrata A C, C B æqualia ſunt rectangulo, quod bis continetur A C B; & lineæ D C quadrato: quod demonſtrare oportebat.

THEOREMA XXXIV. PROPOSITIO XXXIV.

SI in hyperbola, vel ellipſi, vel circuli circunferentia ſumatur aliquod punctum; ab eoque recta linea ad diametrum ordinatim applicetur; & quam proportionem habent lineæ interiectæ inter applicatam, & terminos tranſverſi lateris figuræ, eandem habeant inter ſe partes lateris tranſverſi, ita ut quæ ſunt ad verticem partes ſibi ipſis reſpondeant: recta linea coniungens punctum, quod in tranſverſo latere ſumitur, & punctum, quod eſt in ſectione, ſectionem ipſam contingет.

A SIT hyperbole, vel ellipſis, vel circuli circunferentia, cuius diameter A B; ſumaturque aliquod punctum in ſectione, quod ſit C; & ab eo linea C D ordinatim applicetur: fiat autem ut B D ad D A, ſic B E ad E A; & iungatur E C. Dico lineam C E ſectionem contingere. Si enim fieri poteſt, ſecet, ut E C F; & ſumpto in



ea aliquo puncto F, ordinatim applicetur GFH: per puncta verò A, B ducãtur AL, BK, quæ ipſi E C æquidiſtent; & iunctæ DC, B C, G C ad puncta M, X, K producantur. Itaque quoniam ut B D ad D A, ita eſt B E ad E A. & ut B D ad D A,
4. ſexti. ſic B K ad A N: ut autem B E ad E A, ita B C ad C X, hoc eſt B K ad X N. erit
2. ſexti.
ut

ut B K ad A N, ita B K ad N X. æqualis eſt igitur A N ipſi N X: & propterea re- 9. quinti.
ctangulum A N X maius eſt rectangulo A O X. quare linea N X ad X O maiorem B
habet proportionem, quàm O A ad A N. ſed ut N X ad X O, ita K B ad B M.
ergo K B ad B M maiorem proportionem habet, quàm O A ad A N: ideoque re-
ctangulum, quod fit ex K B, A N, maius eſt eo, quod ex B M, A O. ſequitur igi-
tur rectangulum ex K B, A N ad quadratum C E maiorem proportionem habere,
quàm rectangulum ex M B, A O ad quadratum C E. at verò ut rectangulum ex C
K B, A N ad quadratum C E, ſic rectangulum B D A ad quadratum D E, pro-
pter ſimilitudinem triangulorum B K D, A N D, E C D: & ut rectangulum ex
M B, A O ad quadratum C E, ſic rectangulum B G A ad quadratum G E. ergo
B D A rectangulum ad quadratum D E maiorem proportionem habet, quàm re-
ctangulum B G A ad quadratum G E: & permutando rectangulum B D A ad re- 27.quinti
ctangulum A G B maiorem habet proportionem, quàm quadratum D E ad E G apud Cã-
quadratum. ſed ut rectangulum B D A ad ipſum A G B, ita quadratum C D ad 21.huius.
quadratum G H: & ut quadratum D E ad quadratum E G, ſic quadratum C D 4 & 22.ſe
ad quadratum F G. quadratum igitur C D ad quadratum G H maiorem propor- xti.
tionem habet, quàm quadratum C D ad quadratum F G: & iccirco linea H G mi-
nor eſt ipſa G F; quod fieri non poteſt. linea igitur E C non ſecat. quare ſectionem
ipſam contingat neceſſe eſt.

EVTOCIVS.

SCIENDVM eſt lineam C D, quæ ad diametrum ordinatim applicatur, in hyperbola quidem determinare lineas B D, D A, & relinquere ipſam B A, quæ in proportionem linearum B D, D A ſecari debet; in ellipſi verò & circuli circunferentia contra evenit: nam cùm ſecet lineam B A, neceſſe eſt ut inquiramus B E, E A in determinata proportione, in qua videlicet ſunt B D, D A. neque enim difficile eſt data proportione, æqualem ipſi exhibere. Sed & illud ſcire oportet, in unaquaque ſectione duas deſcriptiones eſſe, nempe puncto F vel intra C, vel extra ſumpto, ita ut omnes caſus ſex ſint. utitur autem duobus lemmatibus, quæ nos deinceps conſcribemus.

Et propterea rectangulum A N X maius eſt rectangulo A O X. quare linea N X ad X O maiorem proportionem habet, quàm O A ad AN.) *Quoniam enim rectangulum A N X rectangulo A O X maius eſt:* B



fiat rectangulo A N X æquale rectangulum, quod ipſa A O, & alia quæpiam linea, videlicet X P contineatur, quæ quidem maior erit, quàm X O. eſt igitur ut O A ad A N, ſic N X ad X P. ſed N X ad X O maiorem proportionem habet, quàm ad X P. ergo O A ad AN minorem habet proportionem, quàm N X ad X O: & ideo N X ad X O maiorem habet, quàm O A ad A N. 14. ſexti. 8. quinti.

Sed contra illud etiam conſtat, ſi N X ad X O maiorem proportionem habeat, quàm O A ad A N, & rectangulum A N X maius eſſe rectangulo A O X.

Fiat enim ut O A ad A N, ita N X ad aliam lineam maiorem ipſa X O, videlicet ad X P. quare rectangulum A N X æquale eſt rectangulo, quod A O, X P continetur. rectangulum igitur A N X rectangulo A O X maius erit.

At verò ut rectangulum K B, A N ad quadratum CE, ſic rectangulum B D A ad quadratum D E.) *Quoniam igitur ob linearum A N, E C, K B æquidiſtantiam, ut A N ad E C, ita eſt A D ad D E: ut autem E C ad K B, ita E D ad D B. quare ex æquali, ut A N ad K B, ita A D ad D B: & propterea ut quadratum A N ad rectangulum ex A N, K B, ita quadratum A D ad rectangulum A D B. ſed ut quadra-* C 4. ſexti. lemm. 22 decimi.

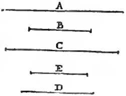
tum

tum EC ad quadratum A N, ita quadratum E D ad quadratum D A. ergo ex æquali ut quadratum E C ad rectangulum ex K B, A N, ita quadratum E D ad rectangulum A D B: & convertendo ut rectangulum ex K B, A N ad quadratum E C, ita rectangulum B D A ad quadratum D E.

A FIAT autem ut B D ad D A, ſic B E ad E A.] *In hyperbola quomodo illud fiat perſpicuum eſt: at verò in ellipſi, vel circulo, ſumatur in DB linea, quæ ſit æqualis DA; ſitque D G, ut in propoſitis figuris; & fiat ut B G ad G D, ita B A ad A E: erit enim componendo ut B D ad D G, hoc eſt ad D A ei æqualem, ita B E ad E A. quod faciendum proponebatur.*

B Et propterea rectangulum A N X maius eſt rectangulo A O X. quare linea N X ad X O maiorem proportionem habet, quàm O A ad AN.) *Illud Pappus ad principium ſeptimi libri hoc lemmate demonſtrauit.*

Habeat A ad B maiorem proportionem, quàm C ad D. Dico rectangulum contentum lineis A, D maius eſſe eo, quod B, C continetur.



Fiat enim ut A ad B, ita C ad E. ergo C ad E maiorem proportionem habet, quàm ad D: & iccirco E minor eſt, quàm D. Itaque poſita A communi altitudine, erit rectangulum ex A, E minus rectangulo ex A, D. ſed rectangulum ex A, E æquale eſt ei, quod ex B, C. rectangulum igitur ex B, C minus eſt rectangulo ex A, D: & propterea rectangulum ex A, D maius eo, quod ex B, C.

Similiter etiam ſi minor ſit proportio, rectangulum rectangulo minus erit.

Sed rurſus ſit rectangulum ex A, D maius rectangulo ex B, C. Dico A ad B maiorem habere proportionem, quàm C ad D.

Ponatur nanque rectangulo ex A, D æquale rectangulum quod ex B, E: erit rectangulum ex B, E maius eo, quod ex B, C. quare & E maior, quàm C. ut autem A ad B, ita E ad D. ſed E ad D maiorem habet proportionem, quàm C ad D. ergo & A ad B habebit maiorem, quàm C ad D. 14. ſexti.

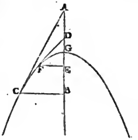
C At verò ut rectangulum ex K B, A N ad quadratum C E, ſic rectangulum BDA ad quadratum D E.] *Ex tertio lemmate Pappi.*

THEOREMA XXXV. PROPOSITIO XXXV.

SI parabolen recta linea cõtingat, conveniens cum diametro extra ſectionem: quæ à tactu ad diametrum ordinatim applicatur, abſcindet ex diametro ad verticem ſectionis lineam æqualem ei, quæ inter ipſam & contingentem interijcitur; & in locum, qui eſt inter contingentem & ſectionem, alia recta linea non cadet.

SIT parabole, cuius diameter A B: ordinatimque applicetur B C; & ſit A C linea ſectionem contingens. Dico linem A G ipſi G B æqualem eſſe. Si enim fieri poteſt, ſit inæqualis; & ipſi A G æqualis ponatur G E: linea autem E F ordinatim applicetur; & iungatur A F. ergo A F producta conveniet cum linea A C: quod ſie-

fieri non poteſt: duarum enim rectarum linearum ijdem termini eſſent. non ergo inæqualis eſt A G ipſi G B. quare neceſſariò erit æqualis. Rurſus dico in locum, qui eſt inter A C & ſectionem, aliam rectam lineam non cadere. Si enim fieri poſſit, cadat C D: ipſique G D æqualis ponatur G E; & E F ordinatim applicetur. ergo à puncto D ad F ducta linea contingit ſectionem. quare producta extra ipſam cadet: & propterea conueniet cum D C; eruntque duarum linearum rectarum ijdem termini; quod eſt abſurdum. non igitur in locum, qui eſt inter ſectionem & lineam A C, alia recta linea cadet.



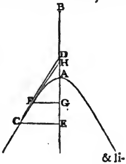
FED. COMMANDINVS.

ERGO A F producta conueniet cum linea A C; quod fieri non poteſt: duarum enim rectarum linearum ijdem termini eſſent.) *Nam linea A F ex trigeſima tertia propoſitione huius ſectionem contingit. quare ſi producatur, cadet extra ſectionem; & idcirco conueniet cum linea A C, ita ut ſint duarum linearum rectarum ijdem termini; quod eſt abſurdum: quoniam duæ rectæ lineæ ſuperficiem intra ſeſe concluderent. alia eſt enim linea, quæ à puncto A ad F; alia quæ ab eodem puncto ad C ducitur: quarum linearum ijdem termini erunt, unus videlicet ad A, alter ad punctum, in quo linea A F cum A C conuenit.* A

THEOREMA XXXVI. PROPOSITIO XXXVI.

SI hyperbolen, vel ellipſim, vel circuli circunferentiam contingat quædam recta linea conueniens cum tranſverſo figuræ latere; & à tactu recta linea ad diametrum ordinatim applicetur: erit ut linea, quæ interijcitur inter contingentem, & terminum tranſverſi lateris ad interiectam inter eandem & alterum lateris terminum, ita linea, quæ eſt inter ordinatim applicatam, & terminum lateris ad eam, quæ eſt inter eandem & alterum terminum; adeo ut continuatæ inter ſe ſint, quæ ſibi ipſis reſpondent: & in locum, qui inter contingentem, & ſectionem coni interijcitur, altera recta linea non cadet.

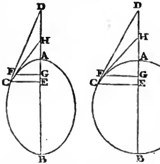
SIT hyperbole, vel ellipſis, vel circuli circunferentia, cuius diameter A B: linea verò contingens ſit C D; & C E ordinatim applicetur. Dico ut B E ad E A, ſic eſſe B D ad D A. Si enim non eſt ita, ſit ut B D ad D A, ſic B G ad G A: & ordinatim applicetur G F. ergo quæ à puncto D ad F ducitur recta linea ſectionem continget, & producta conueniet cum ipſa C D. quare duarum rectarum linearum ijdem termini erunt: quod eſt abſurdum. Dico etiam in locum, qui inter ſectionem



34. huius.

& li-

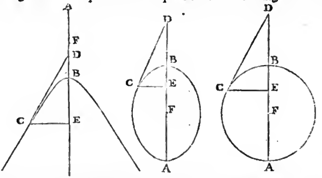
& lineam C D interijcitur, nullam rectam lineam cadere. Si enim fieri poteſt, cadat C H: & ut B H ad H A, ita fiat B G ad G A; & G F ordinatim applicetur. Iuncta ergo H F ſi producatur, conveniet cum ipſa H C; atque erunt duarum linearum rectarum ijdem termini: quod fieri non poteſt. non ergo inter ſectionem & lineam C D altera recta linea cadet.



THEOREMA XXXVII. PROPOSITIO XXXVII.

SI hyperbolen, vel ellipſim, vel circuli circunferentiam recta linea contingens cum diametro conveniat; & à tactu ad diametrum linea ordinatim applicetur: quæ interijcitur inter applicatam & centrum ſectionis, unà cum interiecta inter contingentem & ſectionis centrum, continebit rectangulum æquale quadrato lineæ, quæ eſt ex centro ſectionis: ſed unà cum ea, quæ inter applicatam & contingentem interijcitur, continebit ſpatium, quod ad quadratum lineæ applicatæ eandem proportionem habet, quàm tranſverſum figuræ latus ad rectum.

SIT hyperbole, vel ellipſis, vel circuli circunferentia, cuius diameter A B: ducaturque linea contingens C D: & C E ordinatim applicetur; centrum autem ſit F. Dico rectangulum D F E quadrato F B æquale eſſe: & ut rectangulum D E F ad



quadratum E C, ita tranſverſum latus ad rectum. Quoniam enim C D contingit
36. huius. ſectionem; & ordinatim applicata eſt C E: erit ut A D ad D B, ita A E ad E B. ergo componendo, ut utraque A D, D B ad D B, ita utraque A E, E B ad E B: & antecedentium dimidia. In hyperbola quidem in hunc modum argumentabimur

Digitized by Google

mur. ſed utriuſque A E, E B dimidia eſt F E; ipſius autem A B dimidia F B. ut
igitur F E ad E B, ita F B ad B D: & per converſionem rationis ut E F ad F B,
ita F B ad F D. quare rectangulum E F D quadrato F B eſt æquale. & quoniam 17. ſexti.
ut F E ad E B, ita F B ad B D, hoc eſt A F ad B D: erit permutando ut A F ad
F E, ita D B ad B E; & componendo, ut A E ad E F, ita D E ad E B. ergo 16. ſexti.
rectangulum A E B æquale eſt rectangulo F E D. ſed ut rectangulum A E B ad 21. huius.
quadratum C E, ita tranſverſum latus ad rectum. ut igitur rectangulum
F E D ad quadratum E C, ita tranſverſum latus ad rectum. In ellipſi verò, & circuli circunferentia hoc modo. ſed utriuſque A D, D B dimidia eſt
D F; & ipſius A B dimidia F B. ergo ut F D ad D B, ita F B ad B E; & per
converſionem rationis, ut D F ad F B, ita B F ad F E. rectangulum igitur D F E 17. ſexti.
æquale eſt quadrato B F. at verò rectangulum D F E rectangulo D E F unà cum 3. ſecundi 6
quadrato F E eſt æquale: & quadratum B F æquale rectangulo A E B unà cum 7. quinti.
quadrato F E. commune auferatur, videlicet quadratum F E. reliquum igitur
rectangulum D E F ad quadratum C E eſt ut rectangulum A E B ad idem C E quadratum. ſed ut rectangulum A E B ad quadratum C E, ita tranſverſum latus ad
rectum. ergo ut rectangulum D E F ad quadratum E C, ita tranſverſum latus ad
rectum,

EVTOCIVS.

Ex his theorematibus patet; quomodo per datum punctum in diametro, vel vertice ſectionis, contingentem lineam ducere poſſimus.

FED. COMMANDINVS.

Ex iis, quæ demonſtrata ſunt, conſtat, lineam C D contingere ſectionem; ſive rectangulum D F E æquale ſit quadrato F B; ſive D E F rectangulum ad quadratum E C eam proportionem habeat, quam tranſverſum figuræ latus ad rectum.

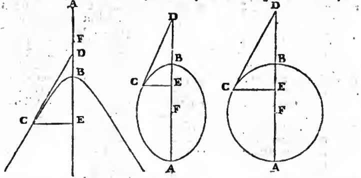
*SIT enim hyperbole, vel ellipſis, vel circuli circunferentia, cuius diameter A B;
& ſumatur aliquod punctum C in ſectione; à quo recta linea C E ad diametrum ordinatim applicetur: ſit autem ſectionis centrum F; fiatque ut E F ad F B, ita D F ad F D; 17. ſexti.
& iungatur C D; erit rectangulum D F E quadrato F B æquale. Itaque dico lineam C D
ſectionem contingere. Quoniam enim in hyperbola eſt ut E F ad F B, ita B F ad F D:
per converſionem rationis erit ut F E ad E B, ita F B ad B D; & antecedentium dupla.
ſed lineæ A E, E B dupla ſunt ipſius F E; & lineæ A D, D B dupla F B. quare ut
A E, E B ad E B, ita A D, D F ad D B; & dividendo ut A E ad E B, ita A D
ad D B. ergo ex trigeſima quarta huius linea C D ſectionem contingit. In ellipſi verò,
& circuli circunferentia, ut D F ad F B, ita eſt B F ad F E. quare per converſionem
rationis, ut F D ad D B, ita F B ad B E; & antecedentium dupla. ſunt autem lineæ
A D, D B ipſius F D dupla, & A E, E B dupla F B. ut igitur A D, D B ad D B,
ita A E, E B ad E B; & dividendo ut A D ad D B, ita A E ad E B. ex quibus ſe- 34. huius.
quitur, ut linea C D ſectionem contingat.*

*Rurſus eadem maneant; & in linea F B ſumatur punctum D, ita ut D E F rectangulum ad quadratum C E eam proportionem habeat, quam tranſverſum figuræ latus ad
latus rectum. Dico lineam C D contingere ſectionem. Quoniam enim rectangulum D E F
ad quadratum C E eſt ut tranſverſum latus ad rectum. & ut tranſverſum latus ad re- 21. huius.
ctum, ita A F B rectangulum ad quadratum C E. erit rectangulum D E F ad quadratum C E, ut rectangulum A E B ad idem quadratum: & propterea rectangulum A E B 9. quinti.
rectangulo D E F eſt æquale. ergo in hyperbola, ut A E ad E F, ita D E ad E B; & di- 14. ſexti.*

 viden-

Digitized by Google

videndo, permutandoque ut AF, hoc eſt F B ad B D, ita F E ad E B; & per conver-
16. texti *ſionem rationis, ut B F ad F D, ita E F ad F B. rectangulum igitur D F E quadrato F B eſt æquale. & ideo ex iis, quæ proximè demonſtravimus, linea C D ſectionem continget. Sed in ellipſi, & circuli circumferentia, quoniam rectangulum A E B æquale*



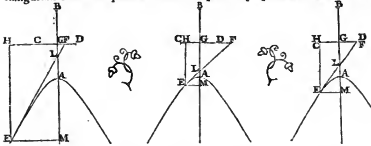
eſt rectangulo D E F: addito utrique quadrato F E, erit rectangulum A E B unà cum quadrato F E æquale rectangulo D E F unà cum quadrato F E. rectangulo autem A E B unà cum quadrato F E æquale eſt quadratum B F; & rectangulo D E F unà
5. ſecũdi. 3 *cum quadrato F E æquale rectangulum D F E. ergo rectangulum D F E æquale eſt quadrato F B: & propterea linea C D ſectionem ipſam contingat neceſſe eſt. quæ omnia demonſtrare oportebat. Ad hoc autem theorema quartum lemma Pappi ſpectare videtur.*

THEOREMA XXXVIII. PROPOSITIO XXXVIII.

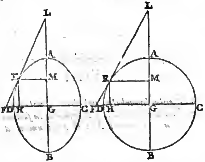
SI hyperbolen, vel ellipſim, vel circuli circunferentiam recta linea contingens cum ſecunda diametro conveniat; & à tactu ad diametrum applicetur linea alteri diametro æquidiſtans: quæ interijcitur inter applicatam & ſectionis centrum, unà cum interiecta inter contingentem & centrum ſectionis, continebit rectangulum æquale quadrato, quod fit ex dimidia ſecundæ diametri; ſed unà cum ea, quæ inter applicatam & contingentem interijcitur, ſpatium continebit, quod ad quadratum applicatæ eam proportionem habeat, quàm figuræ rectum latus ad tranſverſum.

SIT hyperbole, vel ellipſis, vel circuli circunferentia, cuius diameter A G B, ſecunda diameter C G D: linea verò ſectionem contingens ſit E L F, quæ conveniat cum C D in F; & H E ipſi A B æquidiſtet. Dico rectangulum F G H quadrato C G æquale eſſe: & ut rectangulum G H F ad quadratum H E, ita rectum figuræ latus ad latus tranſverſum. Ordinatim nanque applicata M E, erit ut rectan-
37. huius; gulum G M L ad quadratum M E, ita tranſverſum latus ad rectum. ſed ut tranſ-
diff. 2. diametri. verſum latus B A ad C D, ita C D ad latus rectum. ergo ut tranſverſum latus ad rectum, ita quadratum A B ad quadratum C D: & ita horum quadratorum quartæ partes, videlicet quadratum G A ad quadratum G C. ut igitur rectangulum

lum G M L ad quadratum M E, ita quadratum A G ad G C quadratum: ſed re-
ctangulum G M L ad quadratum M E compoſitam proportionem habet ex propor- 23. sext.



tione G M ad M E, hoc eſt ad G H, & ex proportione L M ad M E. quare con-
vertendo proportio quadrati M E ad rectangulum G M L componitur ex propor-
tione E M ad M G, hoc eſt H G ad G M, & ex proportione E M ad M L, hoc eſt 4. sexti.
F G ad G L. ergo quadratum C G ad quadratum G A compoſitam habet propor-
tionem ex proportione H G ad G M, &
ex proportione FG ad G L. hæc autem 23. sexti.
eadem eſt, quæ rectanguli F G H ad
rectangulum M G L. ut igitur rectan-
gulum F GH ad rectangulum M G L,
ita quadratum C G ad quadratum
G A: & permutando ut rectangulum
F G H ad quadratum C G, ita rectan-
gulum M G L ad quadratum G A. re
ctangulum autem M G L æquale eſt 37. huius
quadrato GA. ergo rectangulum FGH
quadrato C G æquale erit. Rurſus ut 21. huius
rectum latus ad tranſverſum, ita qua-
dratum E M ad rectangulum G M L:



quadratum verò E M ad rectangulum G M L compoſitam proportionem habet ex 4. sexti.
proportione E M ad M G, hoc eſt G H ad H E; & ex proportione E M ad M L,
hoc eſt F G ad G L, hoc eſt F H ad H E; quæ proportio eadem eſt, quam habet
rectangulum F H G ad quadratum H E. ergo ut rectangulum F H G ad quadra-
tum H E, ita rectum latus ad tranſverſum,

Iiſdem poſitis oſtendendum eſt, ut linea, quæ inter tangentem, & terminum ſecundæ diametri ad partes applicatæ interijcitur, ad eam, quæ inter tangentem, & alterum terminum ſecundæ diametri, ita eſſe lineam, quæ eſt inter alterum terminum & applicatam, ad eam, quæ inter alterum terminum & applicatam.

Quoniam enim æquale eſt rectangulum F G H quadrato G C, hoc eſt rectangu-
lo C G D; nam linea C G æqualis eſt ipſi G D: erit F G H rectangulum rectangu-
lo C G D æquale. ergo ut F G ad G D, ita C G ad G H: & per converſionem 14. sexti.
rationis, ut G F ad F D, ita G C ad C H, & antecedentium dupla. eſt autem
ipſius G F dupla utraque C F, F D, propterea quòd CG eſt æqualis G D:

 & ipſi

& ipſius G C dupla D C . ut igitur utraque C F, F D ad F D, ita D C ad C H: & dividendo ut C F ad F D, ita D H ad H C. quod demonſtrare oportebat.

Ex iam dictis manifeſtum eſt lineam E F contingere ſectionem, ſive rectangulum F G H æquale ſit quadrato G C, ſive F H G rectangulum ad quadratum H E eam, quam diximus, proportionem habeat. converſo enim modo illud facilè oſtendetur.

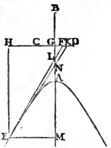
EVTOCIVS.

IN aliquibus exemplaribus hoc theorema in ſola hyperbola demonſtratum invenimus; ſed hoc loco univerſaliter demonſtratur, quoniam eadem contingunt & in aliјs ſectionibus: Apollonio autem viſum eſt non ſolum hyperbolen, ſed etiam ellipſim ſecundam diametrum habere, ut ſæpe ex ipſo in ſuperioribus didicimus. & in ellipſi quidem caſum non habet; in hyperbola verò tres habet caſus: punctum enim F, in quo linea ſectionem contingens cum ſecunda diametro convenit, vel eſt infra D, vel in ipſo D, vel ſupra; & propterea punctum H ſimiliter tres locos obtinet. attendendum autem eſt, cùm F cadit infra D, & H infra C cadere: cùm verò F cadit in D, & H in C; & cùm F ſupra D, & H ſupra C cadet.

FED. COMMANDINVS.

Ex iam dictis manifeſtum eſt lineam E F contingere ſectionem, ſive rectangulum F G H æquale ſit &c.

SIT enim hyperbole, vel ellipſis, vel circuli circunferentia, cuius diameter A G B, ſecunda diameter C G D: & ſumatur in ſectione aliquod punctum E; à quo ad diametrum ordinatim applicetur E M: & ad ſecundam diametrum ducatur E H, ipſi A B æquidiſtans. ſumpto autem in linea G D puncto F, ita ut rectangulum F G H æquale ſit quadrato C G; iungatur E F ſecans diametrum in L. Dico lineam E F ſectionem contingere. Si enim fieri poteſt, non contingat ſectionem linea E L F, ſed alia linea E N K: eodem modo, quo uſus eſt Apollonius demonſtrabitur rectangulum K G H quadrato C G æquale eſſe. ſed eidem quadrato C G ponitur æquale rectangulum F G H. rectangulum igitur K G H rectangulo F G H eſt æquale. ut autem re-



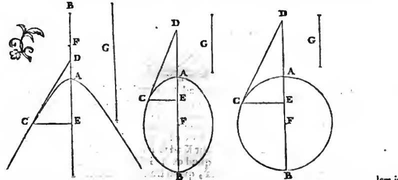
1 sexti. *ctangulum K G H ad rectangulum F G H, ita linea K G ad lineam F G. ergo linea K G æqualis eſt ipſi F G: quod fieri nullo modo poteſt. ſequitur igitur lineam E L F neceſſariò ſectionem contingere. Iiſdem manentibus, habeat rectangulum F H G ad quadratum H E eandem proportionem, quam rectum latus ad tranſverſum. Rurſus dico lineam E L F contingere ſectionem. Habebit enim quadratum H F ad rectangulum F H G proportionem eandem, quam tranſverſum latus ad rectum. ſed proportio quadrati H E ad rectangulũ F H G compoſita eſt ex proportione E H ad H F, hoc eſt L M ad M E; & ex*
4 sexti. *proportione E H ad H G, hoc eſt G M ad M E: quæ quidem eſt ea, quam habet rectangulum G M L ad quadratum M E. ergo rectangulum G M L ad quadratum M E eſt, ut tranſverſum latus ad rectum. quare ex his, quæ in antecedenti demõſtravimus, linea E L F ſectionem continget.*

THEO-

THEOREMA XXXIX. PROPOSITIO XXXIX.

SI hyperbolen, vel ellipſim, vel circuli circunferentiam recta linea contingens cum diametro conveniat; & à tactu ad diametrum linea ordinatim applicetur: ſumpta quavis linea ex duabus, quarum altera interijcitur inter applicatam & centrum ſectionis, altera inter applicatam & contingentem; habebit ad eam applicata proportionem compoſitam ex proportione, quam habet altera dictarum linearum ad applicatam, & ex proportione, quam rectum figuræ latus habet ad tranſverſum.

SIT hyperbole, vel ellipſis, vel circuli circunferentia, cuius diameter A B, centrum autem F: ducaturque linea C D ſectionem contingens; & C E ordinatim applicetur. Dico C E ad alteram linearum F E, E D proportionem habere compoſitam ex proportione, quam habet rectum figuræ latus ad tranſverſum, & ex ea, quam altera dictarum linearum F E, E D habet ad ipſam E C. Sit enim rectangulum F E D æquale rectangulo, quod fit ex E C, & linea, in qua G. Et quoniam ut rectangulum F E D ad quadratum C E, ita tranſverſum latus ad rectum. atque eſt rectangulum F E D rectangulo ex EC, & G æquale. erit ut rectangulum ex EC, 37. huius.



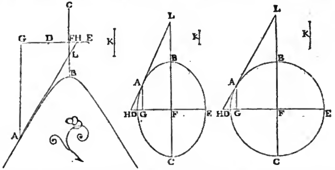
& G ad quadratum C E, hoc eſt ut G ad C E, ita tranſverſum latus ad rectum. lem. in 22. decimi.
rurſus quoniam rectangulum F E D æquale eſt rectangulo ex E C & G: ut F E ad E C, ita erit G ad E D. habet autem C E ad E D proportionem compoſitam ex proportione, quam C E habet ad G, & ex ea, quam G ad E D. utque C E ad G, ita eſt rectum latus ad tranſverſum: & ut G ad E D, ita F E ad E C. ergo C E ad E D proportionem habebit compoſitam ex proportione, quam habet rectum latus ad tranſverſum, & ex ea, quam F E habet ad E C 14. ſexti.

THEOREMA XL. PROPOSITIO XL.

Si hyperbolen, vel ellipſim, vel circuli circunferentiam recta linea contingens cum ſecunda diametro conveniat; & à tactu ad eandem diametrum linea applicetur, diametro alteri æquidiſtans:

ſumpta qualibet linea ex duabus, quarum una inter applicatam & ſectionis centrum interijcitur, altera inter applicatam & contingentem: habebit ad ipſam applicata proportionem compoſitam ex proportione, quam habet tranſverſum figuræ latus ad rectum, & ex ea, quam altera dictarum linearum habet ad applicatam.

SIT hyperbole, vel ellipſis, vel circuli circunferentia A B, cuius diameter BFC, ſecunda diameter D F E: ducaturque recta linea ſectionem contingens H L A; & ipſi BC æquidiſtans ducatur A G. Dico A G ad alteram linearum H G, G F proportionem habere compoſitam ex proportione, quam habet tranſverſum figuræ latus ad rectum, & ex ea, quam altera dictarum linearum H G, G F habet ad ipſam G A. Sit enim rectangulum H G F rectangulo, quod fit ex G A, & linea K, æqua-



38. huius. le. Itaque quoniam ut rectum latus ad tranſverſum, ita rectangulum H G F ad quadratum G A. rectangulo autem H G F æquale eſt, quod fit ex G A & K. erit rectangulum ex G A & K ad quadratum G A, hoc eſt K ad A G, ut latus rectum ad tranſverſum. & quoniam A G ad G F compoſitam habet proportionem ex proportione, quam habet A G ad K, & ex ea, quam K ad G F. eſtque ut A G ad K,
14. sexti. ita tranſverſum latus ad rectum: & ut K ad G F, ita H G ad G A; propterea quòd rectangulum H G F æquale ſit ei, quod ex A G & K. conſtat ergo A G ad GF compoſitam habere proportionem ex ea, quam tranſverſum latus ad rectum, & ex ea, quam H G habet ad G A.

THEOREMA XLI. PROPOSITIO XLI.

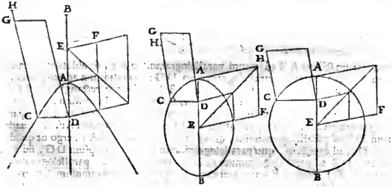
SI in hyperbola, vel ellipſi, vel circuli circunferentia recta linea ordinatim applicetur ad diametrum; & ab applicata, & ea, quæ ex centro, parallelogramma æquiangula deſcribantur; habeat autem applicata ad reliquum parallelogrammi latus proportionem compoſitam ex proportione, quam habet ea, quæ ex centro, ad reliquum latus, & ex proportione, quam rectum figuræ ſectionis latus habet ad tranſverſum: parallelogrammum factum à linea,

quæ

quæ inter centrum & applicatam interijcitur, ſimile parallelogrammo ab ea, quæ ex centro; in hyperbola quidem maius eſt, quàm parallelogrammum ab applicata parallelogrammo ab ea, quæ ex centro; in ellipſi verò & circuli circunferentia unà cum parallelogrammo, quod fit ab applicata, æquale eſt parallelogrammo ab ea, quæ ex centro.

SIT hyperbole, vel ellipſis, vel circuli circunferentia, cuius diameter A B, centrum E; & ordinatim applicetur C D: à lineis autem E A, C D æquiangula parallelogramma deſcribantur, quæ ſint A F, D G; & habeat D C ad C G proportionem compoſitam ex proportione, quam habet A E ad E F, & ex ea, quam rectum figuræ latus habet ad tranſverſum. Dico in hyperbola parallelogrammum, quod fit ex E D ſimile ipſi A F, parallelogrammis A F, G D æquale eſſe: in ellipſi verò & circuli circunferentia, parallelogrammum, quod fit ex E D ſimile A F, una cum parallelogrammo G D ipſi A F eſſe æquale. Fiat enim ut rectum figuræ latus ad tranſverſum, ita D C ad C H. Et quoniam ut D C ad C H, ita rectum latus ad tranſverſum. ut autem D C ad C H, ita quadratum D C ad rectangulum D C H: & ut rectum latus ad tranſverſum, ita quadratum D C ad rectangulum B D A. erit rectangulum B D A rectangulo D C H æquale. rurſus quoniam D C ad C G proportionem habet compoſitam ex proportione, quam habet A E ad EF, & ex ea, quam rectum latus ad tranſverſum, hoc eſt quam D C habet ad C H. ſed

lem. in 22. decimi.
21. huius.
9. quinti.

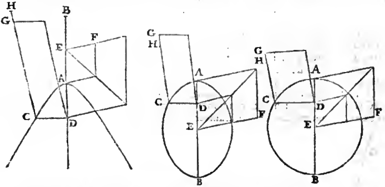


D C ad C G compoſitam proportionem habet ex proportione D C ad C H, & ex proportione H C ad C G. erit proportio compoſita ex proportione A E ad E F, & ex proportione DC ad CH eadem, quæ componitur ex proportione DC ad C H, & ex proportione H C ad C G. communis auferatur, proportio ſcilicet D C ad C H. reliqua igitur proportio A E ad E F eadem eſt, quæ reliqua H C ad C G. ut autem H C ad C G, ita rectangulum H C D ad rectangulum G C D: & ut A E ad E F, ita quadratum AE ad rectangulum A E F. ergo ut rectangulum H C D ad rectangulum GCD, ita quadratum AE ad rectangulum AEF. ſed oſtenſum eſt rectãgulum HCD æquale eſſe rectangulo BDA. ut igitur rectangulũ BDA ad rectangulum G C D, ita quadratum A E ad rectangulum A E F: permutandoque ut rectangulum B D A ad quadratum A E, ita rectangulum G C D ad ipſum A E F. & ut rectangulum G C D ad A E F rectangulum, ita parallelogrammum D G ad paral-

1. ſexti.
lem. in 22 decimi.
11. quinti

A

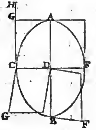
11. sexti. parallelogrammum F A: parallelogramma enim æquiangula ſunt, & proportionem habent compoſitam ex proportione laterum G C ad A E, & C D ad E F. quare ut rectangulum B D A ad quadratum A E, ita parallelogrammum D G ad
B ipſum F A. Itaque in hyperbola hoc modo concludemus. Vt omnia ſe habent ad
6. ſecundi omnia, ita unum ad unum. ergo ut rectangulum B D A unà cum quadrato A E ad A E quadratum, hoc eſt quadratum D E ad quadratum E A, ſic parallelogram-
C ma G D, A F ad parallelogrammum A F. ſed ut quadratum D E ad quadratum E A, ſic parallelogrammum, quod fit ex D E ſimile, & ſimiliter deſcriptum ipſi A F ad parallelogrammum A F. ut igitur parallelogramma D G, A F ad parallelogrammum A F, ſic parallelogrammum ex D E deſcriptum ſimile ipſi A F ad AF.
9. quinti. ergo parallelogrammum ex D E, ſimile ipſi A F, æquale eſt parallelogrammis
D G D, A F. In ellipſi verò & circuli circunferentia hoc modo. Quoniam ut totum,



quadratum ſcilicet A E ad totum parallelogrammum A F, ſic ablatum rectangu-
19. quinti 5. ſecūdi. lum A D B ad ablatum parallelogrammum D G: erit reliquum ad reliquum, ſicut totum ad totum. quòd ſi à quadrato E A auferatur rectangulum B D A, relinquetur quadratum D E. ut igitur quadratum D E ad exceſſum, quo parallelogrammum A F excedit parallelogrammum D G, ſic quadratum A E ad paral-
E lelogrammum A F. ſed ut quadratum A E ad parallelogrammum AF, ſic quadratum D E ad parallelogrammum, quod fit ex D E ſimile ipſi A F. ergo ut quadratum D E ad exceſſum, quo parallelogrammum A F excedit ipſum D G, ſic quadratum D E ad parallelogrammum ex D E, ſimile ipſi A F. parallelogrammum igitur ex D E ſimile A F æquale eſt exceſſui, quo parallelogrammum A F excedit
9. quinti. D G. quare ſequitur parallelogrammum ex D E ſimile AF unà cum parallelogrammo D G ipſi A F æquale eſſe.

E V T O C I V S.

Theorema hoc in hyperbola caſū non habet; in ellipſi verò, ſi applicata in centrum cadat, & reliqua eodē modo diſponantur, parallelogrammū, quod fit ab applicata parallelogrammo, quod ab ea, quæ ex centro, æquale erit. Sit enim ellipſis, cuius diameter A B, centrum D; ordinatimque applicetur C D; & ab ipſis C D, D A parallelogramma æquiangula deſcribantur, D G, A F: habeat autem D C ad C G proportionem compoſitam ex proportione, quam habet A D ad D F, & ex ea; quam rectum figuræ latus habet ad tranſverſum. Dico parallelogrammum A F



æqua-

æquale eſſe parallelogrammo D G. Quoniam enim in ſuperioribus oſtenſum eſt, ut quadratum A D ad parallelogrammum A F, ita eſſe rectangulum A D B ad parallelogrammum D G: erit permutando, ut quadratum A D ad rectangulum A D B, ita parallelogrammum A F ad parallelogrammum D G. ſed quadratum A D æquale eſt rectangulo A D B. ergo parallelogrammum A F parallelogrammo D G æquale erit.

FED. COMMANDINVS.

ET ut rectangulum G C D ad A E F rectangulum, ita parallelogrammum DG ad parallelogrammum F A.) *Hoc etiam conſtat ex ſexto lemmate Pappi.* A

Vt omnia ſe habent ad omnia, ita unum ad unum] *In omnibus antiquis codicibus, quos viderim, ſic legitur: ὡς πάντα πρὸς πάντα, ἓν πρὸς ἕν. Sed delenda ſunt, ut arbitror, tanquã ab aliquo addita; illud enim per compoſitam rationem colligi perſpicuũ eſt.* B

Sed ut quadratum D E ad quadratum E A, ſic parallelogrammum, quod fit ex D E ſimile, & ſimiliter deſcriptum ipſi A F ad parallelogrammum A F] *Quadratum enim D E ad quadratum E A duplam proportionem habet eius, quæ eſt lateris D E ad latus E A: & eandem proportionem habet parallelogrammum ex D E ſimile ipſi A F ad A F, ex corollario 20. ſexti elementorum.* C

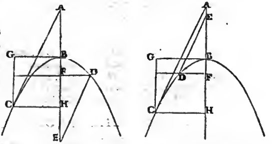
Quoniam ut totum, quadratum ſcilicet A E ad totum parallelogrammum AF.] *Demonſtratum enim eſt ſuperius, ut rectangulum B D A ad quadratum A E, ita eſſe parallelogrammum D G ad parallelogrammum F A. quare permutando rectangulum B D A ad parallelogrammum D G eſt ut quadratum A E ad parallelogrammum A F.* D

Sed ut quadratum A E ad parallelogrammum A F, ſic quadratum D E ad parallelogrammum, quod fit ex D E ſimile ipſi A F.) *Erat enim ut quadratum D E ad quadratum E A, ſic parallelogrammum ex D E ſimile ipſi A F ad A F. ergo & permutando.* E

THEOREMA XLII. PROPOSITIO XLII.

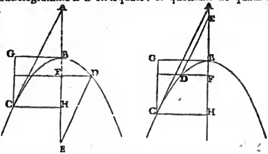
SI parabolen recta linea contingens cum diametro conveniat; & à tactu ad diametrum linea ordinatim applicetur; ſumpto autem quovis puncto in ſectione, applicentur ad diametrum duæ lineæ, altera quidem contingenti æquidiſtans, altera verò æquidiſtans ei, quæ à tactu ordinatim applicata eſt: triangulum, quod ab ipſis conſtituitur, æquale erit parallelogrammo contento linea à tactu applicata, & ea, quæ interijcitur inter æquidiſtantem & verticem ſectionis.

SIT parabole, cuius diameter A B; ducaturq; linea A C ſectionem contingens; & CH ordinatim applicetur: à quovis autem puncto D applicetur D F; & per D quidem ducatur D E ipſi AC æquidiſtans, per C verò ipſa CG æquidiſtans B F,



denique per B ducatur B G, quæ ipſi H C æquidiſtet. Dico triangulum E D F æquale eſſe parallelogrammo F G. Quoniam enim A C ſectionem contingit, & ordina-

A dinatim applicata eſt C H: erit A B æqualis ipſi B H, & A H dupla H B. trian-
35.huius. gulum igitur A H C parallelogrammo B C eſt æquale. & quoniam ut quadra-
20 tum C H ad quadratum D F, ita linea H B ad ipſam B F, propter ſe-
B ctionem. ut autem quadratum CH ad quadratum D F, ita triangu-
1. ſexti. lum A C H ad triangulum E D F: & ut H B ad B F, ita parallelogrammum G H ad parallelogrammum G F. erit ut triangulum ACH ad triangulum EDF, ita



H G parallelogrammum ad parallelogrammum F G: & permutando, ut A C H triangulum ad parallelogrammum H G, ita triangulum E D F ad parallelogrammum F G. ſed triangulum A C H æquale eſt parallelogrammo H G. ergo triangulum E D F parallelogrammo F G æquale erit.

E V T O C I V S.

HOC theorema undecim habet caſus; unum quidem, ſi D ſupra C ſumatur; conſtat enim lineas æquidiſtantes cadere intra ipſas A C H: alios autem quinque caſus habet, ſi D ſumatur infra C; nam linea D F æquidiſtans cadet extra C H, & D E inter A & B cadet, vel in ipſo B, vel inter B & H, vel in H, vel infra H; ut enim ſupra A cadat, fieri non poteſt: quoniam cùm D ſit infra C, & quæ per ipſum æquidiſtans A C ducitur, infra A cadet. quòd ſi D ſumatur ex altera parte ſectionis; vel utraque æquidiſtantes inter B & H cadent; vel D F quidem cadet ſupra H C, punctum verò E vel in H, vel infra: vel rurſus E cadet infra H; & F vel in H, ita ut C H D ſit recta linea, [quanquam tunc non exactè æquidiſtantium proprietas ſervetur] vel infra H cadet. Oportet autem in demonſtratione quinque caſuum poſtremorum lineam D F uſque ad ſectionem, & ad ipſam G C produci. Sed ex his aliam quandam deſcriptionem mente concipere poſſumus, cùm videlicet ſumatur aliud punctum, & quæ in principio ſumpta fuerant lineæ faciant id, quod dictum eſt. ſed hoc theorema eſt, non caſus.

FED. COMMANDINVS.

A Triangulum igitur A H C parallelogrammo B C eſt æquale.) *Eſt enim paral-*
41. primi. *lelogrammum C H A duplum trianguli A H C, itemque duplum parallelogrammi CHB,*
1. ſexti. *hoc eſt ipſius B C. quare ex nona quinti ſequitur triangulum A C H parallelogrammo B C æquale eſſe.*

B Vt autem quadratum C H ad quadratum D F, ita triangulum A C H ad triangulum E D F.) *Quadratum enim C H ad quadratum D F duplam proportionem habet eius, quæ eſt lateris C H ad D F, ex corol. 20. ſexti: & ſimiliter eandem habet proportionem triangulum A C H ad triangulum E D F ipſi ſimile. ut igitur quadratum C H ad quadratum D F, ita triangulum A C H ad triangulum E D F.*

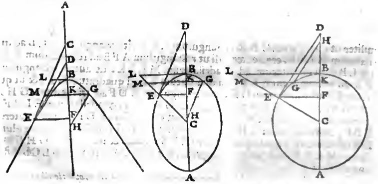
THEOREMA XLIII. PROPOSITIO XLIII.

SI hyperbolen, vel ellipſim, vel circuli circunferentiam recta linea contingens conveniat cum diametro; & à tactu ad diame-

trum

trum linea ordinatim applicetur; huic verò æquidiſtans ducatur per verticem ſectionis, quæ cum linea per tactum & centrum ducta conveniat; & ſumpto aliquo puncto in ſectione, ab eo ad diametrum duæ lineæ ducantur, una quidem contingenti æquidiſtans; altera verò æquidiſtans ei, quæ à tactu applicata eſt: triangulum ab ipſis factum in hyperbola minus erit, quàm triangulum, quod abſcindit linea per centrum & tactum ducta, triangulo ab ea, quæ ex centro, ſimili abſciſſo: in ellipſi verò, & circuli circunferentia, unà cum triangulo abſciſſo ad centrum, æquale erit triangulo ſimili abſciſſo, quod ab ea quæ ex centro deſcribitur.

SIT hyperbole, vel ellipſis, vel circuli circunferentia, cuius diameter A B, centrum C; ducaturque linea D E ſectionem contingens; & iuncta C E, ordinatim applicetur E F: ſumatur autem aliquod punctum in ſectione, quod ſit G; & ducatur linea G H contingenti æquidiſtans; & G K M ordinatim applicetur; per B verò ordinatim applicetur B L. Dico triangulum K M C differre à triangulo C L B per triangulum G K H. Quoniam enim linea E D ſectionem contingit; or-



dinatim verò applicata eſt E F: habebit E F ad F D proportionem compoſitam ex proportione C F ad F E, & ex proportione recti lateris ad tranſverſum. ſed ut E F ad F D, ita G K ad K H; & ut C F ad F E, ita C B ad B L. ergo G K ad K H proportionem habebit compoſitam ex proportione C B ad B L, & ex proportione recti lateris ad tranſverſum. quare ex his, quæ in quadrageſimo primo theoremate oſtendimus, triangulum C K M à triangulo B C L differt, triangulo G H K. etenim in parallelogrammis triangulorum duplis hæc eadem demonſtrata ſunt.

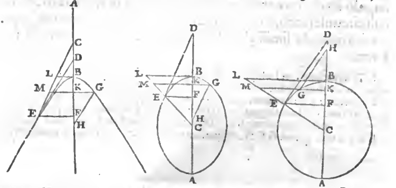
39. huius.
4. ſexti.
15. quinti.

EVTOCIVS.

IN aliquibus codicibus huius theorematis talis legitur demonſtratio. Quoniam enim rectangulum F C D æquale eſt quadrato C B: erit ut F C ad C B, ita B C ad C D. quare ut figura, quæ fit ex F C ad figuram ex C B, ita linea F C ad C D. ſed ut figura ex F C ad figuram ex C B, ita E C F triangulum ad triangulum L C B; &

37. huius.
14. ſexti.
cor. 20. ſexti.

1. ſexti. ut linea F C ad ipſam C D, ita E F C triangulum ad triangulum E C D. ut igitur
E C F triangulum ad triangulum L C B, ita triangulum E C F ad ipſum E C D.
5. quinti proptereaque triangulum E C D triangulo L C B eſt æquale. ergo in hyperbola
A per converſionem rationis; & in ellipſi, convertendo, dividendoque, & rurſus
B convertendo, ut E F C triangulum ad quadrilaterum E L B F, ita triangulum
9. quinti. E C F ad triangulum E D F. quare triangulum E D F æquale eſt quadrilatero
C E L B F: & quoniam ut quadratum F C ad C B quadratum, ita triangulum E C F
D ad triangulum L C B: in hyperbola quidem dividendo; in ellipſi autem conver-
E tendo, & per converſionem rationis, & rurſus convertendo, erit ut rectangulum
F A F B ad quadratum B C, ita quadrilaterum E L B F ad triangulum B L C; &



ſimiliter ut quadratum C B ad rectangulum A K B, ita triangulum L C B ad quadrilaterum M L B K. ergo ex æquali ut rectangulum A F B ad rectangulum A K B, ita E L B F quadrilaterum ad quadrilaterum M L B K. ut autem rectangulum

11. huius. A F B ad rectangulum A K B, ita quadratum E F ad quadratum G K: & ut quadratum E F ad quadratum G K, ita triangulum E D F ad triangulum G H K. quare ut triangulum E D F ad triangulum G H K, ita quadrilaterum E L B F ad quadrilaterum M L B K: & permutando ut triangulum E D F ad quadrilaterum E L B F, ita triangulum G H K ad quadrilaterum M L B K. sed triangulum E D F oſtenſum eſt æquale quadrilatero E L B F. ergo & triangulum G H K quadrilatero M L B K eſt æquale. triangulum igitur M C K à triangulo L C B differt triangulo G H K.

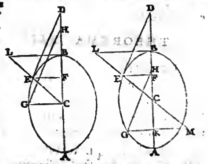
Sed cùm hac demonſtratio obſcuritatem quandam habeat in proportionibus ellipſis, enitendum eſt, ut ea, qua breviter dicta ſunt, latiùs explicentur.

E Quoniam, *inquit*, ut quadratum F C ad quadratum C B, ita triangulum E C F ad triangulum L C B, erit convertendo, & per converſionem rationis, rurſusque convertendo. *eſt enim convertendo ut quadratum B C ad quadratum C F, ita L C B triangulum ad triangulum E F C: & per converſionem rationis, ut quadratum B C ad rectangulum A F B [hoc eſt ad exceſſum, quo quadratum B C excedit quadratum C F, quoniam punctum C lineam A C bifariam ſecat]*

3. ſecũdi. *ita triangulum L B C ad quadrilaterum L B F E: & convertendo, ut rectangulum A F B ad quadratum B C, ita quadrilaterum L B F E ad L C B triangulum. Habet autem in hyperbola caſus undecim, quot habebat pracedens theorema in parabola, & praterea alium quendam, cùm ſcilicet punctum, quod in G ſumitur, idem ſit, quod E. tunc enim contingit triangulum E D F unà cum triangulo L B C aquale eſſe triangulo C E F: quoniam oſtenſum eſt triangulum E D F quadrilatero L B F E aquale. quadrilaterum autem L B F E à triangulo C E F ipſo L B E triangulo differt. Sed in ellipſi vel punctum G idem eſt, quod E, vel ſupra E ſumitur,*

& tunc

& tunc utraſque æquidiſtantes inter D & F cadere perſpicuum eſt. Quòd ſi G ſumatur infra E, & ab eo ducta linea æquidiſtans ipſi E F cadat inter F & C; punctum H quinque caſus efficit. vel enim cadit inter D & B, vel in B, vel inter B & F, vel in F, vel inter F & C. Si verò, quæ per G ducitur applicata æquidiſtans, in centrum C cadat; punctum H ſimiliter quinque efficit caſus. Attendendum tamen eſt, triangulum factum à lineis, quæ ipſis D E, E F æquidiſtant, triangulo L B C æquale eſſe. Quoniam enim ut quadratum E F ad quadratum G C, ita triangulum E D F ad triangulum G H C; ſimilia enim triangula ſunt. & ut quadratum E F ad quadratum G C, ita rectangulum B F A ad rectangulum B C A, hoc eſt ad quadratum B C. erit, ut triangulum E D F ad ipſum G H C, ita rectangulum B F A ad quadratum B C. ut autem rectangulum B F A ad quadratum B C, ita quadrilaterum L B F E ad triangulum L B C, quod demonſtratum iam fuit. ergo ut E D F triangulum ad triangulum G H C, ita eſt quadrilaterum L B F E ad triangulum L B C: & permutando ut triangulum E D F ad quadrilaterum L B F E, ita triangulum G H C ad triangulum L B C. ſed æquale eſt triangulum E D F quadrilatero L B F E. triangulum igitur G H C triangulo L B C eſt æquale. Poſſumus autem hæc etiam aliter probare; ſi dicamus in parallelogrammis triangulorum duplis eadem demonſtrata eſſe, videlicet in quadrageſimo primo theoremate. Quòd ſi ducta per G æquidiſtans E F cadat inter C & A; producetur quidem, quouſque linea C E cum ipſa conveniat; & punctum H ſeptem caſus efficiet. vel enim inter B & D cadit, vel in B, vel inter B & F, vel in F, vel inter F & C, vel in C, vel inter C & A: & in his caſibus contingit, differentiam triangulorum L B C, G H K infra conſtitui à lineis G K, E C productis. Si verò G ſumatur in altera parte ſectionis; & quæ per G ducitur, ipſi E F æquidiſtans, inter B & F cadat; producetur ob demonſtrationem, quouſque ſecet ipſam L C: & punctum H faciet ſeptem caſus; vel inter B & F cadens, vel in F, vel inter F & C, vel in C, vel inter C & A, vel in A, vel infra A. Et ſi G K cadat inter F & C; punctum H quinque caſus efficiet. vel enim erit inter F & C, vel in C, vel inter C & A, vel in A, vel infra A. Sed ſi G K in centrum C cadat; punctum H caſus efficiet tres, vel inter C & A cadens, vel in A vel extra A: atque in his caſibus rurſus contingit triangulum G H K æquale eſſe triangulo L B C. Denique ſi G K cadat inter C & A; punctum H vel cadet inter C & A, vel in A, vel extra. Itaque in ellipſi caſus omnes erunt quadraginta duo, & totidem in circuli circunferentia; ita ut huius theorematis caſus ſint nonaginta ſex. 21. huius



FED. COMMANDINVS IN DEMONSTRATIONEM.

QVÆ AB EVTOCIO AFFERTVR.

Ergo in hyperbola per converſionem rationis) *Quoniam enim eſt, ut E C F triangulum ad triangulum L C B, ita triangulum E C F ad triangulum E C D: erit per converſionem rationis, ut E C F triangulum ad quadrilaterum E L B F, ita triangulum E C F ad triangulum E D F.* A

Et in ellipſi convertendo, dividendoque, & rurſus convertendo) *Rurſus quoniam ut triangulum E C F ad triangulum L C B, ita triangulum E C F ad triãgulum E C D: convertendo erit, ut L C B triangulum ad triangulum E C F, ita triangulum E C D ad triangulum E C F: dividendoque, ut quadrilaterum E L B F ad triangulum E C F,* B

ita triangulum E D F ad triangulum E C F: & rurſus convertendo ut triangulum E C F ad quadrilaterum E L B F, ita triangulum E C F ad E D F triangulum.

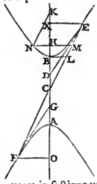
C Et quoniam ut quadratum F C ad C B quadratum, ita triangulum E C F ad triangulum L C B.) *Sunt enim triangula E C F, L B C ſimilia, & duplam inter ſe proportionem habent eius, quæ eſt lateris ad latus ſimilis rationis, quemadmodum & ipſa quadrata.* cor. 20. sexti.

D In hyperbola quidem dividendo.) *Nam cùm ſit, ut quadratum F C ad C B quadratum, ita triangulum E C F ad triangulum L C B: erit dividendo ut exceſſus, quo quadratum F C excedit C B quadratum, hoc eſt rectangulum A F B, ex ſexta ſecundi elementorum, ad quadratum C B, ita quadrilaterum E L B F ad triangulum L C B.*

F Et ſimiliter ut quadratum C B ad rectangulum A K B, ita triangulum L C B ad quadrilaterum M L B K.] *Quoniam enim ut quadratum K C ad C B quadratum, ita triangulum M C K ad triangulum L C B: ſimiliter demonſtrabitur, ut rectangulum A K B ad B C quadratum, ita quadrilaterum M L B K ad triangulum L C B. quare & convertendo.*

THEOREMA XLIV. PROPOSITIO XLIV.

SI unam oppoſitarum ſectionum recta linea contingens cum diametro conveniat; à tactu verò ad diametrum linea ordinatim applicetur; atque huic æquidiſtans ducatur per verticem alterius ſectionis, ut conveniat cum linea per tactum & centrum ducta; ſumpto autem in ſectione quovis puncto, applicentur ad diametrum duæ lineæ, quarum altera contingenti æquidiſtet, altera æquidiſtet ei, quæ à tactu ordinatim applicata eſt: triangulum ab ipſis factum minus eſt, quàm triangulum, quod abſcindit applicata ad centrum ſectionis, triangulo ſimili abſciſſo ab ea, quæ ex centro.



Sint oppoſitæ ſectiones A F, B E, quarum diameter A B, centrum C; & ab aliquo puncto eorum, quæ ſunt in ſectione F A, videlicet à puncto F ducatur linea F G ſectionem contingens; ordinatimque applicetur F O; & iuncta F C producatur, ut ad E: per B verò ducatur B L ipſi F O æquidiſtans; & ſumatur aliquod punctum in ſectione B E, quod ſit N; à quo N H ordinatim applicetur; atque ipſi F G æquidiſtans ducatur N K. Dico triangulum N H K minus eſſe, quàm triangulum C M H, triangulo C B L. Ducatur enim per E linea E D contingens E B ſectionem: & E X ordinatim applicetur. Itaque quoniam oppoſitæ ſectiones ſunt F A, B E, quarum diameter A B; & linea F C E per centrum ducitur; & F G, E D ſectiones contingunt: erit D E ipſi F G æquidiſtans. eſt autem N K æquidiſtans F G. ergo & N K ipſi E D, & M H ipſi B L æquidiſtat. quoniam igitur hyperbole eſt B E, cuius diameter A B, centrum C; & linea E D ſectionem contingit; ordinatimque applicata eſt E X; & ipſi E X æquidiſtat B L; ſumpto autem in ſectione puncto N, ab eo ordinatim applicatur N H, & ipſi D E æquidiſtans ducitur N K;

erit

erit triangulum N H K minus, quàm triangulum H M C, ipſo C B L triangulo. hoc enim in quadrageſimo tertio theoremate oſtenſum eſt.

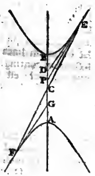
EVTOCIVS.

Itaque quoniam oppoſitæ ſectiones ſunt F A, B E, quarum diameter A B; & linea F C E per centrum ducitur; & F G, D E ſectiones contingunt: erit D E ipſi F G æquidiſtans.] *Quoniam igitur hyperbole eſt A F; lineaque F G ſectionem contingit; & applicata eſt F O: erit rectangulum O C G æquale quadrato C A, ex trigeſimo ſeptimo theoremate: & ſimiliter rectangulum X C D quadrato C B æquale. eſt igitur ut rectangulum O C G ad quadratum A C, ita rectangulum X C D ad quadratum B C; & permutando ut rectangulum O C G ad rectangulum X C D, ita quadratum A C ad ipſum C B: & iccirco rectangulum O C G æquale eſt rectangulo X C D. eſtque linea O C æqualis ipſi C X. ergo & G C ipſi C D. ſed F C ipſi C E eſt æqualis, ex trigeſimo theoremate. linea igitur F C, C G æquales ſunt ipſis E C, C D. anguloſque æqua-* ex demon
les continent ad C; ſunt enim ſecundum verticem. quare & F G ipſi E D eſt æqualis; ſtratis in
& angulus C G F angulo C D E: qui quidem anguli alterni ſunt. ergo F G ipſi E D 30. huius.
æquidiſtabit. Caſus huius theorematis duodecim ſunt, quemadmodum in hyperbola, ut 15.primi.
diximus in quadrageſimo tertio theoremate, atque eadem eſt demonſtratio. 4.
27.

FED. COMMANDINVS.

Ex his, quæ ſuperiùs dicta ſunt, licet etiam illud demonſtrare.

Si unam oppoſitarum ſectionum recta linea contingat; & à tactu ducatur diameter uſque ad alteram ſectionem: quæ ab eo puncto ducitur, lineæ ſectionem contingenti æquidiſtans, ſectionem ipſam continget.



Sint oppoſitæ ſectiones A F, B E, quarum diameter A B, centrum C, ut in propoſita figura; & linea F G in F ſectionem contingat: ducatur autem diameter F C E, ſectioni B E in puncto E occurrens; & ab eo ducatur E D æquidiſtans F G. Dico lineam E D ſectionem in E contingere. Nam ſi non contingit E D; ducatur ab eodem puncto alia linea ſectionem contingens, quæ ſit E P. æquidiſtabit E P lineæ F G, ex iam demonſtratis. ergo & ipſi E D: 30.primi.
quod fieri non poteſt; conveniunt enim inter ſe in puncto E. linea igitur E D in E ſectionem contingat neceſſe eſt.

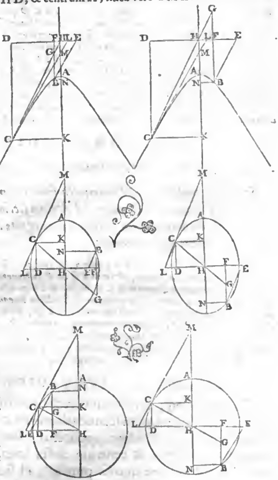
THEOREMA XLV. PROPOSITIO XLV.

SI hyperbolen, vel ellipſim, vel circuli circunferentiam recta linea contingens cum ſecunda diametro conveniat; & à tactu ad eandem diametrum linea applicetur, diametro alteri æquidiſtans; & per tactum & centrum ducta linea producatur; ſumpto autem in ſectione quovis puncto, ad ſecundam diametrum ducantur duæ lineæ, quarum una contingenti, altera applicatæ æquidiſtet: triangulum, quod ab ipſis conſtituitur, in hyperbola quidem maius eſt, quàm triangulum abſciſſum ab applicata ad

 cen-

centrum, triangulo, cuius baſis eſt linea contingens, & vertex centrum ſectionis; in ellipſi verò & circuli circunferentia unà cum triangulo abſciſſo æquale eſt triangulo, cuius baſis linea contingens, & vertex ſectionis centrum.

SIT hyperbole, vel ellipſis, vel circuli circunferentia A B C, cuius diameter A H, ſecunda diameter H D, & centrum H; linea verò C M L ſectionem contingat in C; ducaturque C D ipſi A H æquidiſtans; & iuncta CH producatur: ſumpto deinde in ſectione quovis pũcto B, ducantur lineæ B E, B F, quæ ipſis LC, C D æquidiſtent. Dico triangulum BEF in hyperbola quidem maius eſſe, quàm triangulum G H F, triangulo LCH; in ellipſi verò & circuli circunferentia unà cum triangulo F G H æquale eſſe triangulo C L H. Ducantur enim CK, BN æquidiſtantes ipſi D H. Et quoniam linea C M ſectionem contingit; atque applicata eſt C K:



39. huius. habebit CK ad KH proportionem compoſitam ex proportione, quam habet M K ad K C, & ex ea, quã rectum figuræ latus habet ad tráſverſum. ut autem M K ad K C, ita C D ad D L. ergo C K ad K H proportionem compoſitam habet ex proportione C D ad D L, & ex proportione recti lateris ad tráſverſum. atque eſt triangulum C D L figura, quæ fit ex K H: & triangulum C H K, hoc eſt C D H, figura, quæ fit ex C K, hoc eſt ex D H. quare triangulum C D L in hyperbola quidem maius eſt, quàm triangulum C K H, triangulo facto ex A H ſimili ipſi C D L: in ellipſi verò & circuli circunferentia unà cum ipſo C K H eidem triangulo eſt æquale. hoc enim in parallelogram-

grammis triangulorum duplis in quadrageſimo primo theoremate eſt demonſtratum. Itaque quoniam triangulum C D L à triangulo C K H, vel C D H differt triangulo, quod fit ex A H, ipſi C D L ſimili. differt autem & triangulo C H L. erit C H L triangulum æquale ei, quod fit ex A H, ſimile ipſi C D L. rurſus quoniam triangulum B F E ſimile eſt triangulo C D L; & triangulum G F H triangulo C D H: ipſorum latera inter ſe eandem proportionem habent. atque eſt triangulum B F E, quod fit ex N H inter applicatam & centrum interiecta; triangulum verò G F H, quod fit ex B N applicata, hoc eſt ex F H. ex iis igitur, quæ priùs oſtenſa ſunt, triangulum B F E à triangulo G H F differt triangulo, quod fit ex A H, ſimile ipſi C D L. quare & triangulo C L H.

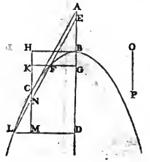
EVTOCIVS.

Attendendum eſt hoc theorema plures habere caſus, in hyperbola enim viginti habet. Nam punctum, quod pro B ſumitur, vel idem eſt, quod C, vel idem quod A: & tunc contingit, triangulum factum ex A H ſimile ipſi D C L idem eſſe, quod à lineis æquidiſtantibus ipſis D L, L C abſcinditur. Si verò B ſumatur inter A C, & puncta D, L ſint ſupra terminos ſecundæ diametri, fient tres caſus. nam puncta F, E vel ſupra terminos ferentur, vel in ipſos, vel infra: & ſi D, L ſint in terminis ſecundæ diametri; F, E infra terminos erunt. Quòd ſi B ſumatur infra C; & H C ad G producatur; tres alios caſus fieri contingit, nempe ipſo D vel ſupra terminos ſecundæ diametri exiſtente, vel in ipſis, vel infra: & ſimiliter F faciet tres alios caſus. Sin autem B ſumatur ex altera parte ſectionis; producetur C H ad H propter demonſtrationem: & B F, B E tres caſus efficient. quoniam F, E vel ad terminos ſecundæ diametri ferentur, vel ſupra, vel infra. Ellipſis verò, & circuli circunferentia varios caſus nunc non explicabimus; cùm de his ſatis dictum ſit in præcedenti theoremate. erunt igitur huius theorematis caſus omnes centum. Sed poſſunt hæc eadem etiam in oppoſitis ſectionibus demonſtrari.

THEOREMA XLVI. PROPOSITIO XLVI.

SI parabolen recta linea contingens cum diametro conueniat: quæ per tactum ducitur diametro æquidiſtans ad eaſdem partes ſectioni, lineas in ſectione ductas, quæ contingenti æquidiſtant, bifariam ſecabit.

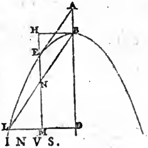
Sit parabole, cuius diameter A B D; & linea A C ſectionem contingat: per C verò ducatur H C M æquidiſtans A D; & ſumpto in ſectione quouis puncto L, ducatur L N F E, quæ ipſi A C æquidiſtet. Dico L N ipſi N F æqualem eſſe. Ducantur enim ordinatim B H, K F G, L M D. Et quoniam ex his, quæ in quadrageſimo ſecundo theoremate demonſtrauimus, triangulum E L D æquale eſt parallelogrammo B M, & triangulum E F G parallelogrammo B K. erit parallelogrammum G M, quod relinquitur, æquale quadrilatero L F G D. commune auferatur M D G F N quinquelaterum. reliquum igitur triangulum K F N reliquo L M N eſt æquale. ſed linea K F æquidiſtat L M. ergo F N ipſi N L æqualis erit.



EV-

EVTOCIVS.

HOC theorema plures caſus habet : demonſtrabimus autem , habita ratione caſuum quadrageſimi ſecundi theorematis ; ut exempli cauſa ſi F cadat in B , ita dicemus . Quoniam triangulum B D L æquale eſt parallelogrammo H B D M . commune auferatur N M D B . erit reliquum triangulum , ſcilicet L N M æquale reliquo H N B . In aliis autem ad hunc modum . Quoniam triangulum L E D parallelogrammo H B D M eſt æquale . & triangulum F E G parallelogrammo H B G K . erit reliquum L F G D æquale reliquo K G D M . commune auferatur N F G D M . reliquum igitur triangulum L N M reliquo K N F eſt æquale ,



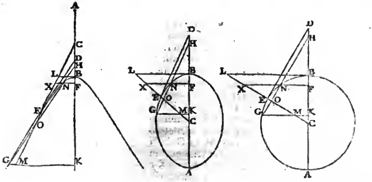
FED. COMMANDINVS.

SED linea K F æquidiſtat L M . ergo F N ipſi N L æqualis erit .) *Quoniam enim æquidiſtant K F , L M : angulus F K N æqualis eſt angulo L M N . anguli autem*
29. primi. 15. *ad N ſecundum verticem inter ſe ſunt æquales . ergo & reliquus æqualis reliquo ; & triangulum F K N triangulo L N M ſimile . Itaque fiat , ut F N ad N L , ſic N L ad aliam*
cor. 20 ſexti. *lineam , quæ ſit O P : erit linea F N ad O P , ut triangulum F K N ad ipſum L M N . quare linea F N lineæ O P eſt æqualis . ſed cùm tres lineæ F N , N L , O P proportionales*
16. ſexti. *ſint ; ſequitur rectangulum ex F N , O P , hoc eſt quadratum F N quadrato N L æquale eſſe : propterea lineam F N lineæ L N æqualem .*

THEOREMA XLVII. PROPOSITIO XLVII.

SI hyperbolen , vel ellipſim , vel circuli circunferentiam recta linea contingens cum diametro conveniat : per tactum & centrum ducta linea ad eaſdem partes ſectioni , lineas , quæ in ſectione ducuntur contingenti æquidiſtantes , bifariam ſecabit .

SIT hyperbole , vel ellipſis , vel circuli circunferentia , cuius diameter A B ,

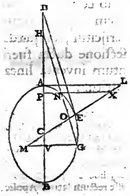


Digitized by Google

centrum C; ducaturque D E ſectionem contingens; & iuncta C E producatur: ſumpto autem in ſectione quovis puncto N, ducatur per N linea H N O G ipſi D E æquidiſtans. Dico N O ipſi O G æqualem eſſe. Applicentur enim ordinatim X N F, B L, G M K. ergo, ex demonſtratis in quadrageſimo tertio theoremate, triangulum H N F æquale eſt quadrilatero L B F X. & G H K triangulum quadrilatero L B K M. reliquum igitur N G K F quadrilaterum reliquo M K F X eſt æquale. commune auferatur O N F K M quinquelaterum. erit reliquum triangulum O M G æquale reliquo O X N. atque eſt M G æquidiſtans N X. ergo N O ipſi O G eſt æqualis.

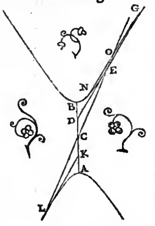
EVTOCIVS.

HOC theorema in hyperbola tot habet caſus, quot habebat precedens in parabola: demonſtrationes autem eorum faciemus, attendentes caſus quadrageſimi tertij theorematis; & in ellipſi itidem, ut in ſubiecta figura, cùm punctum G extra ſumitur. Quoniam triangulum L A C æquale eſt triangulis H G V, V C M, hoc eſt triangulis O H C, O M G. atque eſt idem triangulum L A C æquale triangulo X P C, & quadrilatero L A P X, hoc eſt triangulo N H P, ex his, quæ demonſtrata ſunt in quadrageſimo tertio theoremate. erunt triangula X P C, N H P æqualia triangulis O H C, O M G. commune auferatur triangulum O H C. reliquum igitur triangulum X O N æquale eſt reliquo M O G; & eſt N X æquidiſtans M G. ergo N O ipſi O G eſt æqualis.



THEOREMA XLVIII. PROPOSITIO XLVIII.

SI unam oppoſitarum ſectionum recta linea contingens cum diametro conveniat; & per tactum & centrum linea producta ſecet alteram ſectionem: quæ in altera ſectione ducta fuerit contingenti æquidiſtans, à linea producta bifariam ſecabitur.



Sint oppoſitæ ſectiones, quarum diameter A B, centrum C; & linea K L ſectionem contingat; iunctaque L C producatur: ſumpto autem in B ſectione puncto N, per N ducatur N G, quæ æquidiſtet L K. Dico lineam N O ipſi O G æqualem eſſe. Ducatur enim per E ſectionem contingens E D; erit E D ipſi L K æquidiſtans. quare & ipſi N G. Quoniam igitur hyperbole eſt B N G, cuius centrum C; lineaque D E ſectionem contingit; & iuncta eſt C E; ſumpto autem in ſectione puncto N, per N ipſi D E æquidiſtans ducta eſt N G: ex iis, quæ in hyperbola oſtendimus, erit N O ipſi O G æqualis. ex demõſtratis ab Eutocio i 44. huius.

EV-

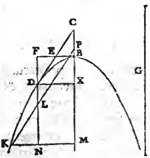
EVTOCIVS.

HVIVS etiam theorematis caſus ita ſe habent, ut in quadrageſimo ſeptimo theoremate dictum eſt de hyperbola deſcriptione.

THEOREMA XLIX. PROPOSITIO XLIX.

SI parabolen recta linea contingens cum diametro conveniat; & per tactum ducatur linea diametro æquidiſtans; à vertice verò ducatur æquidiſtans ei, quæ ordinatim applicata eſt; & fiat, ut portio contingentis, inter applicatam & tactum interiecta, ad portionem æquidiſtantis, quæ itidem inter tactum & applicatam interijcitur, ita quædam recta linea ad duplam contingentis: quæ à ſectione ducta fuerit æquidiſtans, poterit rectangulum contentum inventa linea, & ea, quæ inter ipſam & tactum interijcitur.

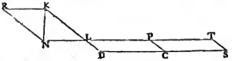
SIT parabole, cuius diameter M B C; & linea C D ſectionem contingat; per D verò ipſi B C æquidiſtans ducatur F D N; & F B ordinatim applicetur, fiatque, ut E D ad D F, ita quædã recta linea G ad duplam ipſius C D: & ſumpto in ſectione puncto K, ducatur per K ipſi C D æquidiſtans K L P. Dico quadratum K L æquale eſſe rectangulo, quod fit ex linea G & D L, hoc eſt, diametro exiſtente D L, lineam G eſſe rectum latus. Applicentur enim ordinatim D X, K N M. Et quoniam C D ſectionem contingit; ordinatim verò applicata eſt D X: erit C B
35. huius. æqualis B X. ſed B X eſt æqualis F D. ergo C B ipſi F D æqualis erit: & propterea triangulum E C B æquale triangulo E F D. commune addatur, figura ſcilicet D E B M N. quadrilaterum igitur D C M N æquale eſt parallelogrammo F M,
42. huius. hoc eſt triangulo K P M. commune auferatur quadrilaterum L P M N. ergo reliquum triangulum K L N parallelogrammo L C eſt æquale. angulus autem D L P æqualis eſt angulo K L N. quare
8. lemm. Pappi. rectãgulum K L N duplum eſt rectanguli L D C. quoniam igitur ut E D ad D F, ita eſt linea G ad duplam ipſius C D. & ut E D
4. ſexti. ad D F, ita K L ad L N. erit, ut G ad duplam C D, ita K L ad L N. ſed ut K L
lemm. 22. decimi. ad L N, ita quadratum K L ad rectangulum K L N: & ut G ad duplam C D, ita
1. ſexti. rectangulum, quod fit ex G & D L, ad duplum rectanguli C D L. quare ut quadratum K L ad rectangulum K L N, ita rectangulum ex G & D L ad duplum ipſius C D L rectanguli; & permutando. eſt autem K L N rectangulum æquale duplo rectanguli C D L. ergo quadratum K L rectangulo ex G & D L æquale erit.



EVTOCIVS.

ERGO reliquum triangulum K L N parallelogrammo D L P C eſt æquale, angulus autem D L P æqualis eſt angulo K L N. quare rectangulum K L N duplum

pluṁ eſt rectanguli L D C.] *Triangulum enim K L N ſeorſum deſcribatur; itemque parallelogrammum D L P C. Et quoniam triangulum K L N æquale eſt parallelogrammo D P: ducatur per N ipſi L K equidiſtans, quæ ſit N R; & per K ducatur K R equidiſtans L N. parallelogrammum igitur eſt L R, & duplum trianguli K L N. quare & parallelogrammi D P duplum. producantur D C, L P ad puncta S, T: ponaturque ipſi D C æqualis C S, & P T æqualis ipſi L P; & iungantur S, T. ergo D T parallelogrammum eſt, duplum ipſius D P: & iccirco L R parallelogrammum æquale parallelogrammo L S. eſt autem & æquiangulum; quoniam anguli ad L ſecundùm verticem ſunt æquales. ſed æqualium, & æquiangulorum parallelogrammorum latera, quæ circa æquales angulos, ex contraria parte ſibi* 14. ſexti
ipſis reſpondent. ergo ut K L ad L T, hoc eſt ad D S, ita D L ad L N: propterea que
rectangulum K L N æquale eſt rectangulo L D S. & cùm D S dupla ſit ipſius D C. re- 16. ſexti
ctangulum K L N rectanguli L D C duplum erit.



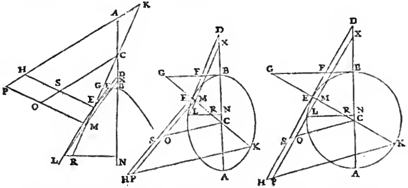
AT ſi linea D C ipſi L P æquidiſtet; C P verò non æquidiſtet ipſi D L: erit D C P L trapezium: & tunc dico rectangulum K L N æquale eſſe ei, quod linea D L, & utraque ipſarum C D, L P continetur. Si enim parallelogrammum L R compleatur, ſicuti prius; producanturque D C, L P; ita ut ipſi L P æqualis ponatur C S, & ipſi D C æqualis P T; & iungantur S, T: fiet D T parallelogrammum duplum ipſius D P; & eadem erit demonſtratio. Hoc autem utile eſt etiam ad ea, quæ ſequuntur.



THEOREMA L. PROPOSITIO L.

SI hyperbolen, vel ellipſim, vel circuli circunferentiam recta linea contingens cum diametro conveniat; & per tactum & centrum linea producatur; à vertice autem ordinatim applicata conveniat cum ea, quæ ducitur per tactum & centrum; fiatque, ut portio contingentis, inter tactum & applicatam interiecta, ad portionem lineæ ductæ per tactum & centrum, quæ itidem inter tactum & applicatam interijcitur, ita quædam recta linea ad duplam contingentis: quæ à ſectione ducitur, contingenti æquidiſtans, ad lineam per tactum & centrum ductam, poterit ſpatium rectangulum, quod adiacet inventæ lineæ, latitudinem habens interiectam inter ipſam & tactum; in hyperbola quidem excedens figura ſimili contentæ linea dupla eius, quæ eſt inter centrum, & tactum, & inventa linea; in ellipſi verò & circulo eadem deficiens.

SIT hyperbole, vel ellipſis, vel circuli circunferentia, cuius diameter A B,
centrum C; & linea D E ſectionem contingat; iuncta verò C E producatur ad
utraſque partes; ponaturque C K ipſi E C æqualis; & per B ordinatim applicetur
B F G: deinde per E ad rectos angulos ipſi E C ducatur E H; fiatque, ut F E ad
E G, ita E H ad duplam ipſius E D; & iuncta H K producatur: ſumpto denique
in ſectione puncto L, per ipſum ducatur L M X quidem ipſi E D æquidiſtans;
L R N verò æquidiſtans B G; & ipſi E H æquidiſtans M P. Dico quadratum
L M rectangulo E M P æquale eſſe. Ducatur enim per C linea C S O æquidiſtans
K P. Itaque quoniam E C æqualis eſt ipſi C K. & ut E C ad C K, ita E S ad S H.
2. ſexti. erit E S ipſi S H æqualis. & quoniam ut F E ad E G, ita H E ad duplam E D.
atque eſt ipſius E H dimidia E S. erit ut F E ad E G, ita S E ad E D. ut autem
A F E ad E G, ita L M ad M R. ergo ut L M ad M R, ita S E ad E D. ſed cùm
B demonſtratum ſit triangulum R N C in hyperbola quidem maius eſſe, quàm tri-
C angulum C G B, hoc eſt triangulum C D E; in ellipſi verò & circulo minus, ipſo
L N X triangulo. communibus ablatis, in hyperbola ſcilicet triangulo E C D, &
N R M X quadrilatero; in ellipſi autem & circulo, triangulo M X C: erit L M
R triangulum quadrilatero M E D X æquale. atque eſt M X æquidiſtans D E, &



D angulus L M R æqualis angulo E M X. ergo rectangulum L M R æquale eſt re-
E ctangulo, quod linea E M, & utraque ipſarum E D, M X continetur. eſt au-
tem ut M C ad C E, ita & M X ad E D, & M O ad E S. ut igitur M O ad E S, ita
M X ad E D: & componendo ut utraque M O, S E ad E S, ita utraque M X,
D E ad E D. quare permutando, ut utraque M O, S E ad utranque M X, D E,
1. ſexti. ita S E ad E D. ſed ut utraque M O, S E ad utranque M X, D E, ita rectan-
gulum, quod continetur utraque M O, S E, & ipſa E M, ad contentum utraque
M X, D E, & E M. ut autem S E ad E D, ita F E ad E G, hoc eſt L M ad M R,
videlicet quadratum L M ad rectangulum L M R. quare ut rectangulum, conten-
tum utraque M O, S E & E M, ad contentum utraque M X, D E, & E M, ita
quadratum L M ad rectangulum L M R: & permutando ut rectangulum, conten-
tum utraque M O, S E, & EM ad quadratum M L, ita contentum utraque M X,
D E, & E M ad L M R rectangulum. eſt autem rectangulum L M R æquale re-
ctangulo, quod fit ex E M, & utraque M X, D E. ergo quadratum L M æqua-
le eſt rectangulo ex E M, & utraque M O, S E. eſtque E S ipſi S H æqualis, &
S H ipſi O P. quadratum igitur L M rectangulo E M P æquale erit.

EV-

EVTOCIVS.

CASVS huius theorematis ita ſe habent, ut in quadrageſimo tertio, & ita caſus theorematis quinquageſimi primi.

FED. COMMANDINVS.

A Vt autem FE ad EG, ita LM ad MR.] *Ob ſimilitudinem triangulorum F E G, L M R. nam cùm æquidiſtent G F, L R; angulus G F E æqualis eſt angulo R L M; & angulus F G E angulo L R M. ergo & reliquus reliquo æqualis; & triangulum F E G triangulo L M R ſimile erit.* 29. primi.

B Sed cùm demonſtratum ſit triangulum R N C in hyperbola quidem maius eſſe, quàm triangulum C G B.] *Etenim in quadrageſimo tertio huius demonſtratum eſt triangulum X L N in hyperbola minus eſſe, quàm triangulum C N R, triangulo C G B; in ellipſi verò, & circuli circunferentia unà cum ipſo C R N æquale eſſe triangulo C G B.*

C Hoc eſt triangulum C D E.] *Triangulum enim C D E triangulo C G B æquale demonſtratum eſt in quadrageſimo tertio huius, uidelicet in ſecunda demonſtratione, quam affert Eutocius in commentarijs.*

D Ergo rectangulum L M R æquale eſt rectangulo, quod linea E M, & utraque ipſarum E D, M X continetur.] *Ex octavo lemmate Pappi, & ex ijs, quæ Eutocius proximè demonſtravit.*

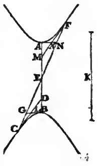
E Eſt autem ut M C ad C E, ita & M X ad E D; & M O ad E S.] *Ex quarta ſexti, ſunt enim triangula C E D, C M X ſimilia; itemque ſimilia inter ſe triangula C M O, C E S.*

THEOREMA LI. PROPOSITIO LI.

SI quamlibet oppoſitarum ſectionum recta linea contingens cum diametro conveniat; & per tactum & centrum linea producatur uſque ad alteram ſectionem; à vertice verò ducatur linea æquidiſtans ei, quæ ordinatim applicata eſt; convenienſque cum linea per tactum & centrum ducta; & fiat, ut portio contingentis inter applicatam & tactum ad portionem lineæ ductæ per tactum & centrum, quæ inter tactum & applicatam interijcitur, ita quædam recta linea ad duplam contingentis: quæ in altera ſectione ducitur, æquidiſtans contingenti, ad lineam per tactum & centrum ductam, poterit rectangulum, quod adiacet inventæ lineæ, latitudinem habens lineam, quæ eſt inter ipſam & tactum; excedenſque figura ſimili ei, quæ linea, inter oppoſitas ſectiones interiecta, & inventa continetur.

SINT oppoſitæ ſectiones, quarum diameter A B, centrum E; & linea C D ſectionem B contingat; iunctaque C E producatur: ordinatim verò applicetur B L G; & fiat, ut L C ad C G, ſic quædam recta linea K ad duplam C D. Itaque perſpicuum eſt in ſectione B C lineas æquidiſtantes C D, quæ ducuntur ad lineam 50. huius

in directum ipſi E C productam, poſſe ſpatia adiacentia lineæ K, latitudinemque habentia lineam, quæ eſt inter ipſas & tactum, & excedentia figura ſimili contentæ linea C F & K. dupla eſt enim F C ipſius C E. Dico igitur idem evenire in ſectione A F. Ducatur per F linea M F, quæ A F ſectionem contingat: ordinatimque applicetur A X N. Et quoniam oppoſitæ ſectiones ſunt B C, A F. atque ipſas
vide Eut. In 44. huius. contingunt C D, M F. erit C D ipſi M F æqualis, & æquidiſtans. eſt autem C E æqualis E F. ergo & E D ipſi E M. ſed quoniam ut L C ad C G, ita linea K ad duplam C D, hoc eſt M F. erit ut X F ad F N, ita K ad duplam M F. atque
50. huius eſt hyperbole A F, cuius diameter A B; & M F ipſam contingit: ordinatim verò applicata eſt A N; & ut X F ad F N, ita K ad duplam M F. ergo quæcunque à ſectione ducuntur, æquidiſtantes F M, ad lineam, quæ in directum protenditur ipſi E F, poterunt rectangulum contentum linea K, & interiecta inter ipſas & punctum F, excedenſque figura ſimili ei, quæ linea C F & K continetur.



46. huius ITAQUE his demonſtratis, perſpicuum eſt in parabola unãquanque rectarum linearum, quæ diametro ex generatione du-
47. huius 48. cuntur æquidiſtantes, diametrum eſſe; in hyperbola verò, ellipſi, & oppoſitis ſectionibus unãquanque earum, quæ per centrum
49. huius ducuntur: & in parabola quidem applicatas ad unãquanque diametrum, æquidiſtantes contingentibus, poſſe rectangula ipſi
50. 51. adiacentia; in hyperbola, & oppoſitis poſſe rectangula adiacen-
60. tia ipſi, quæ excedunt eadem figura; in ellipſi autem, quæ eadem deficiunt: poſtremò quæcunque circa ſectiones, adhibitis principalibus diametris, demonſtrata ſunt, & aliis diametris aſſumptis, eadem contingere.

E V T O C I V S.

DIAMETRVM ex generatione vocat communem ſectionem plani ſecantis, & trianguli per axem, qua in ipſo cono efficitur; quam & principalem diametrum appellat. Dicit autem omnia accidentia ſectionum, quæ in ſuperioribus theorematibus demonſtrata ſunt, poſitis principalibus diametris, & aliis quibuſcunque diametris aſſumptis, eadem contingere poſſe.

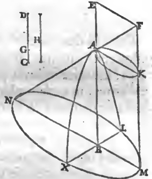
PROBLEMA I. PROPOSITIO LII.

RECTA linea data in plano, ad unum punctum terminata, invenire in plano coni ſectionem, quæ parabole appellatur; ita ut eius diameter ſit data linea, vertex lineæ terminus; quæ verò à ſectione ad diametrum in dato angulo applicatur, poſſit rectangulum

con-

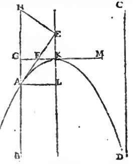
contentum linea, quæ eſt inter ipſam & verticem ſectionis, & altera quadam data linea.

SIT recta linea data poſitione A B, ad A punctum terminata; altera autem magnitudine data C D: & datus angulus primùm ſit rectus. Itaque oportet in ſubiecto plano invenire parabolen; ita ut eius diameter ſit A B, & vertex A: rectum autem figuræ latus C D; & ordinatim ductæ in recto angulo applicentur, hoc eſt ut A B ſit axis. Producatur A B ad E; ſumaturque ipſius C D quarta pars C G; & ſit A E maior, quàm C G: ipſarum autem C D, E A media proportionalis ſit H. eſt igitur ut C D ad E A, ita quadratum H ad E A quadratum. ſed cor. 20. sexti. C D eſt minor, quàm quadrupla ipſius E A. ergo & quadratum H quadrati E A minus eſt, quàm quadruplum: & propterea linea H minor, quàm dupla ipſius E A. Cùm igitur duæ lineæ E A maiores ſint, quàm H; fieri poteſt, ut ex H, 22. primi. & duabus E A triangulum conſtituatur. ergo in linea E A conſtituatur triangulum E A F rectum ad ſubiectum planum; ita ut E A æqualis ſit A F, & H æqualis F E: ducaturque A K æquidiſtans E F; & F K ipſi E A: deinde intelligatur conus, cuius vertex F punctum; baſis autem circulus circa diametrum K A, rectus ad planum, quod per lineas A F, F K tranſit. erit igitur is conus rectus, quoniam A F æqualis eſt F K. Itaque ſecetur conus plano, quod circulo K A æquidiſtet; faciatque ſectionem circulum M N X, rectum videlicet ad planum 4. huius. tranſiens per M F, F N: & ſit circuli M N X, & M F N trianguli communis ſectio M N. quare M N circuli diameter eſt. communis autem ſectio plani ſubiecti, & circuli ſit X L. Quoniam igitur circulus M N X rectus eſt, & ad ſubiectum planum, & ad triangulum M F N: communis ipſorum ſectio X L ad M N F triangulum, hoc eſt ad 19. undecimi. K F A perpendicularis erit. quare & ad omnes rectas lineas, quæ in triangulo ipſam contingunt, & 3. diff. undecimi. ad utranque ipſarum M N, A B. rurſus quoniam conus baſim habens circulum M N X, verticem verò punctum F, ſecatur plano ad M F N triangulum recto, quod ſectionem facit circulum M N X; & ſecatur altero plano ſubiecto, ſecante baſim coni ſecundùm rectam lineam X L, perpendicularem ad M N, quæ communis ſectio eſt circuli M N X, & M F N trianguli. communis autem ſectio ſubiecti plani, & trianguli M F N, videlicet A B æquidiſtans eſt lateri coni F K M. erit coni ſectio, in ſubiecto plano facta, parabole, cuius diameter A B: 11. huius. & lineæ, à ſectione ad ipſam A B ordinatim ductæ, in recto angulo applicabuntur. æquidiſtantes enim ſunt lineæ X L, quæ eſt ad A B perpendicularis. & quoniam tres lineæ C D, H, E A proportionales ſunt. æqualis autem E A ipſi A F, & ipſi F K; atque H æqualis E F, & A K. erit, ut C D ad A K, ita A K ad A F. quare ut C D ad A F, ita quadratum A K ad A F quadratum, hoc eſt ad id, quod 20. ſexti. A F K continetur. ergo rectum ſectionis latus eſt C D. illud enim in undecimo theoremate demonſtratum fuit.



IISDEM poſitis non ſit datus angulus rectus; intelligaturque ipſi æqualis, qui H A E continetur; & ſit A H dimidia C D; ab H verò ducatur H E ad A E perpendicularis; perque E ipſi B H æquidiſtans ducatur E L; & ab A ad E L perpendicularis A L; deinde ſecta E L bifariam in K, ab ipſo K ducatur K M ad rectos angulos ipſi E L; & ad puncta F, G producatur; & quadrato A L æquale

le ſit rectangulum L K M. Itaque duabus rectis lineis L K, K M datis, L K quidem poſitione, quæ ad K terminatur, K M verò magnitudine; & dato angulo recto, deſcribatur parabole, ut dictum eſt, cuius diameter K L, vertex K, & rectum latus K M: tranſibit autem per A, propterea quòd quadratum A L rectangulo L K M
33. huius eſt æquale; & linea A E ſectionem continget, quoniam L K æqualis eſt K E. ſed H A æquidi-
46. huius. ſtat E K L. ergo H A B diameter erit ſectionis: & à ſectione ad eam applicatæ, ipſi A E æquidiſtantes, bifariam dividentur à linea A B; & in angulo H A E applicabuntur. Quoniam igitur angulus A E H æqualis eſt angulo A G F. & communis, qui ad A. triangulum A H E ſimile
4. ſexti. eſt A G F triangulo. ut ergo H A ad A E, ita
15. quinti F A ad A G: & ideo ut dupla H A ad duplam A E, ita F A ad A G. ſed cùm C D ſit dupla ipſius H A; erit ut F A ad A G, ita C D ad duplam A E. quare per ea, quæ in quadrageſimo ſexto theoremate oſtenſa ſunt, erit C D rectum ſectionis latus.



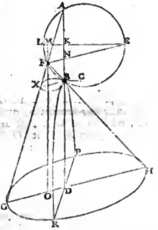
PROBLEMA II. PROPOSITIO LIII.

DATIS duabus rectis lineis terminatis, quæ ad rectos inter ſe angulos conſtituantur; & altera producta ad eaſdem partes angulo
A recto, invenire in linea producta coni ſectionem, quæ hyperbole dicitur, in eodem plano, in quo ſunt datæ lineæ; ita ut producta ſit diameter ſectionis, & vertex punctum, quod ad angulum conſiſtit: quæ verò à ſectione ad diametrum applicatur, angulum faciens æqualem dato, poſſit rectangulum, quod adiacet alteri lineæ, latitudinem habens lineam interiectam inter applicatam & verticem ſectionis, excedenſque figura ſimili, & ſimiliter poſita ei, quæ datis à principio lineis continetur.

SINT datæ rectæ lineæ terminatæ A B, B C, ad rectos inter ſe angulos; & producatur A B ad D. Oportet igitur in plano, quod per A B C tranſit, invenire hyperbolen; ita ut eius diameter ſit A B D, vertex B punctum, & rectum figuræ latus B C: quæ verò à ſectione ad B D in dato angulo applicentur, poſſint rectangula adiacentia ipſi B C; quæ latitudines habeant lineas interiectas inter ipſas, & punctum B; excedantque figura ſimili, & ſimiliter poſita ei, quæ lineis
B A B, B C continetur. Sit datus angulus primùm rectus; & ex linea A B planum attollatur, rectum ad ſubiectum planum, in quo circa lineam A B circulus deſcribatur A E B F; ita ut pars diametri circuli, quæ in portione A E B comprehenditur, ad partem comprehenſam in portione A F B non maiorem proportionem habeat, quàm A B ad B C: & ſecetur A E B circunferentia bifariam in E;
1. tertii. ducaturque à puncto E ad A B perpendicularis E K; & ad L producatur. ergo E L diameter eſt circuli. Quòd ſi ut A B ad B C, ita fuerit E K ad K L; utemur puncto L: ſin minùs; fiat, ut A B ad B C, ita E K ad minorem ipſa K L, quæ ſit

K M

K M; & per M ducatur M F æquidiſtans A B; iunctiſque A F, E F, F B, per B ducatur B X ipſi F E æquidiſtans. Itaque quoniam angulus A F E æqualis eſt angulo E F B. angulus autem A F E angulo A X B: & E F B ipſi F B K. erit & F B X angulus angulo F X B æqualis. quare & linea F B æqualis lineæ F X. Intelligatur conus, cuius vertex F, & baſis circulus circa diametrum B X, rectus ad F B X triangulum. erit utique is conus rectus, quia F B æqualis eſt F X. producantur F B, F X, M F; & ſecetur conus plano, quod circulo B X æquidiſtet: erit ea ſectio circulus; qui ſit G P H R. ergo G H circuli diameter eſt. communis autem ſectio circuli G H, & ſubiecti plani ſit P D R. erit P D R ad utranque ipſarum G H, D B perpendicularis. uterque enim circulorum X B, H G rectus eſt ad triangulum F G H. ſed & ſubiectum planum ad F G H rectum eſt. ergo communis ipſorum ſectio P D R erit & ad F G H perpendicularis, & ad omnes rectas lineas, quæ, in eo plano conſiſtentes, ipſam contingunt. Quoniam igitur conus, cuius baſis eſt circulus G H, & vertex F, ſecatur plano ad F G H triangulum recto, quod facit ſectionem circulum; ſecatur autem & altero plano ſubiecto, ſecante baſim coni ſecundùm rectam lineam P D R, perpendicularem ad G D H; & communis ſectio ſubiecti plani, & trianguli F G H, videlicet D B producta ad B convenit cum G F in puncto A: erit ex ijs, quæ demonſtrata ſunt, ſectio P B R hyperbole, cuius vertex B; & ordinatim ductæ ad diametrum B D in recto angulo applicabuntur. æquidiſtantes etenim ſunt ipſi P D R. Præterea quoniam ut A B ad B C, ita eſt E K ad K M. & ut E K ad K M, ita E N ad N F, hoc eſt rectangulum E N F ad N F quadratum. erit ut A B ad B C, ita E N F rectangulum ad quadratum N F. ſed E N F rectangulum æquale eſt rectangulo A N B. ergo ut A B ad B C, ita rectangulum A N B ad N F quadratum. rectangulum autem A N B ad N F quadratum proportionem habet compoſitam ex proportione A N ad N F, & ex proportione B N ad N F. ſed ut A N ad N F, ita A D ad D G, & F O ad O G: & ut B N ad N F, ita F O ad O H. quare A B ad B C proportionem compoſitam habet ex proportione F O ad O G, & ex proportione F O ad O H, hoc eſt ex proportione quadrati F O ad rectangulum G O H. eſt igitur ut A B ad B C, ita quadratum F O ad G O H rectangulum. atque eſt F O æquidiſtans A D. ſequitur ergo, ut A B ſit tranſverſum figuræ latus, & B C rectum. etenim hæc in duodecimo theoremate oſtenſa ſunt.



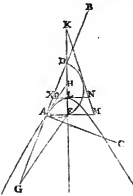
27. tertii. 29. primi. 6. primi. 19. undecimi. 12. huius. 2. ſexti. lemm. 22. decimi. 35. tertii. 23. ſexti. 4. ſexti. 23. ſexti.

C

NON ſit autem datus angulus rectus: ſintque rectæ lineæ datæ A B, A C: & datus angulus æqualis ſit ei, qui B A H continetur. Oportet igitur deſcribere hyperbolen; ita ut eius diameter ſit A B, & rectum latus A C: ductæ verò ad diametrum in angulo B A H applicentur. Secetur A B bifariam in D; & in linea A D deſcribatur ſemicirculus A F D: & ducatur quædam D recta linea F G in ſemicirculum, æquidiſtans A H; facienſque proportionem E quadrati F G ad rectangulum D G A eandem, quam habet C A ad duplam A D; & iuncta F H D producatur: ipſarum autem F D, D H media proportionalis ſit D L; ponaturque ipſi L D æqualis D K; & quadrato A F æqua-

le

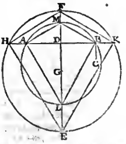
le rectangulum L F M; & iungatur K M: deinde per L ad rectos angulos ipſi K F ducatur L N; & ad X producatur. Datis ergo duabus rectis lineis terminatis, & ad rectos inter ſe angulos K L, L N, deſcribatur hyperbole; cuius tranſverſum quidem latus ſit K L, rectum verò L N: & à ſectione ad diametrum ductæ in recto angulo applicentur; & poſſint rectangula adiacentia lineæ L N, quæ latitudines habeant interiectas inter ipſas & punctum L; excedantque figura ſimili ipſi K L N. tranſibit igitur ſectio per A, cùm quadratum A F æquale ſit rectangulo L F M: &



F linea A H ſectionem continget; rectangulum enim F D H quadrato D L eſt æquale. ergo
47. huius. A B diameter eſt ſectionis. Et quoniam ut C A ad duplam A D, hoc eſt ad A B, ita quadratum F G ad rectangulum D G A. ſed C A ad duplam A D compoſitam proportionem habet ex proportione C A ad duplam A H, & ex pro-
15. quinti. portione duplæ A H ad duplam D A, hoc eſt ex proportione H A ad A D, hoc eſt F G ad
4. ſexti. G D. habebit C A ad A B proportionem compoſitam ex proportione C A ad duplam A H, & ex proportione F G ad G D. habet autem & quadratum F G ad rectangulum D G A proportionem compoſitam ex proportione F G ad G D, & ex proportione F G ad G A. proportio igitur compoſita ex proportione C A ad duplam A H, & ex proportione F G ad G D eadem eſt, quæ proportio compoſita ex proportione F G ad G D, & ex proportione F G ad G A. communis auferatur proportio, quæ eſt F G ad G D. ergo ut C A ad duplam
4. ſexti. A H, ita F G ad G A. & ut F G ad G A, ita O A ad A X. ut igitur C A ad duplam A H, ita O A ad A X: quod cùm ita ſit, erit A C linea, iuxta quam poſſunt, quæ à ſectione ducuntur. hoc enim in quinquageſimo theoremate demonſtratum eſt.

E V T O C I V S.

B ET ex linea A B planum attollatur, rectum ad ſubiectum planum, in quo circa lineam A B circulus deſcribatur A E B F, ita ut pars diametri circuli, quæ in portione A E B comprehenditur, ad partem comprehenſam in portione A F B, non maiorem proportionem habeat, quàm A B ad B C.] *Sint duæ rectæ lineæ A B, B C; & oporteat circa A B circulum deſcribere, cuius diameter à linea A B ita dividatur, ut pars ipſius, quæ eſt ad C, ad reliquam partem non maiorem proportionem habeat, quàm A B ad B C. Ponatur nunc eandem habere: ſeceturque A B bifariam in D; & per D ad rectos angulos ipſi A B, ducatur E D F; & fiat, ut A B ad B C, ita E D ad D F: atque E F bifariam ſecetur. conſtat ergo, ſi quidem A B ſit æqualis B C; & E D ipſi D F æqualem eſſe: & ideo punctum D lineam E F bifariam ſecare: ſi verò A B ſit maior B C, & E D ipſa D F; punctum, quod bifariam lineam E F ſecat, infra D cadet: & ſi minor ſit, cadet ſupra. ſed infra cadat ut G: & cen-*



*centro quidem G, intervallo autem G F circulus deſcribatur. neceſſarium utique eſt
eum vel per puncta A, B tranſire, vel extra, vel intra: & ſi tranſeat per A, B; factum
iam erit, quod oportebat; ſi verò tranſeat extra, producatur A B in utranque partem,
ut conveniat cum circunferentia circuli in punctis H, K: iunctiſque F H, H E, E K,
K F, ducatur per B linea M B, æquidiſtans F K, & B L æquidiſtans K E: & iungan-
tur M A, A L, quæ ipſis F H, H E æquidiſtabunt: propterea quòd æquales inter ſe* 31. tertii.
ſint A D, D B, itemque H D, D K, & E D F ad rectos angulos ipſi H K. Quoniam 29. primi.
*igitur angulus, qui ad K, rectus eſt. & M B, B L æquidiſtant ipſis F K, K E. erit &
qui ad B rectus. & eadem ratione, qui ad A. quare circulus circa M L deſcriptus per
puncta A, B tranſibit. Itaque deſcribatur, ſitque M A L B. Et quoniam M B æqui-* 4. sexti.
*diſtans eſt ipſi F K; erit, ut F D ad D M, ita K D ad D B: & ſimiliter ut K D ad
D B, ita E D ad D L: & permutando ut E D ad D F, ita L D ad D M. ergo ut A B
ad B C, ita L D ad D M. Quòd ſi circulus circa F E deſcriptus ſecet lineam A B;
idem nihilominus demonſtrabitur.* D

ET in linea A D deſcribatur ſemicirculus A F D: & ducatur quædam recta li-
nea F G in ſemicirculum, æquidiſtans A H; facienſque proportionem quadrati
F G ad rectangulum D G A eandem, quam habet C A ad duplam A D.] *Sit ſe-
micirculus A B C circa diametrum A C; data autem proportio ſit E F
ad F G: & oporteat facere ea, quæ propoſita ſunt. Ponatur ipſi E F
æqualis F H; & H G in puncto K bifariam dividatur; ducaturque in
ſemicirculo quæpiam recta linea C B, in angulo A C B: & à centro
L ad ipſam perpendicularis ducatur, quæ producta occurrat circuli cir-* 29. primi
cunferentia in N; & per N ipſi C B æquidiſtans N M. ergo N M cir- & 16. tertii.
*culum contingit. Itaque fiat, ut F H ad H K, ita M X ad X N; &
ipſi X N æqualis ponatur N O: iungantur autem L X, L O, quæ ſemi-
circulum in punctis R, P ſecent; & ducatur P R D. Quoniam igitur
X N æqualis eſt N O. communiſque & ad rectos angulos N L. erit L O
ipſi L X æqualis. ſed L P eſt æqualis L R. ergo & reliqua P O reliquæ* 2. sexti.
*R X: & propterea P R D ipſi O M æquidiſtat. eſt autem ut F H ad
H K, ita M X ad X N: & ut H K ad H G, ita K N ad X O. ex æqua-
li igitur ut F H ad H G, ita M X ad X O: convertendoque ut G H ad
H F, ita O X ad X M: & componendo ut G F ad F H, hoc eſt ad
F E, ita O M ad M X, hoc eſt P D ad D R. ut autem P D ad D R,* 36. tertii.
*ita rectangulum P D R ad D R quadratum. ſed rectangulum P D R
æquale eſt rectangulo A D C. ergo ut G F ad F E, ita A D C rectan-
gulum ad quadratum D R: & convertendo ut E F ad F G, ita quadratum D R ad re-
ctangulum A D C.*



FED. COMMANDINVS.

INVENIRE in linea producta coni ſectionem, quæ hyperbole dicitur.] *Græcus* A
codex ita habet: εὑρεῖν ἐπὶ τῆς προσεκβληθείσης κώνου τομὴν, τὴν καλουμένην ὑπερβολήν. *Sed vi-
de, ne verba illa* (ἐπὶ τῆς προσεκβληθείσης) *ſupervacanea ſint, ſtatim enim ſubiungit:*
ὅπως ἡ μὲν προσεκβληθεῖσα διάμετρος ᾖ τῆς τομῆς.

EST igitur ut A B ad B C, ita quadratum F O ad G O H rectangulum.] *Ad* C
*hunc locum, ut opinor, unum Pappi lemma pertinet; in quo oſtenditur, ut quadra-
tum F O ad rectangulum G O H, ita eſſe rectangulum A N B ad N F quadratum.*

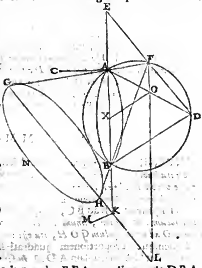
Facienſque proportionem quadrati F G ad rectangulum D G A eandem, E
quam habet C A ad duplam A D.] *In Græco codice legitur:* ποιοῦσα τὸν τοῦ ἀπὸ Ζ Η πρὸς
τὸ ὑπὸ Δ Η Α λόγον τὸν αὐτὸν τῷ τῆς Α Γ πρὸς Α Β. *ſed legendum eſt, ut apud Eutocium.* τὸν
αὐτὸν τῷ τῆς Α Γ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς Α Δ. *quod etiam ex iis, quæ ſequuntur, perſpicuè
apparet.*

F ET linea A H ſectionem continget ; rectangulum enim F D H quadrato D L
eſt æquale.] *Nam cum inter lineas F D , D H proportionalis facta ſit D L ; rectan-*
17. ſexti. *gulum F D H æquale eſt quadrato D L . quare ex ijs, quæ demonſtravimus in commen-*
tarijs in trigeſimam ſeptimam propoſitionem huius , linea A H ſectionem ipſam con-
tingat neceſſe eſt .

PROBLEMA III. PROPOSITIO LIV.

DATIS duabus rectis lineis terminatis , atque ad rectos inter ſe angulos , invenire circa diametrum alteram ipſarum coni ſectionem, quæ ellipſis appellatur, in eodem plano , in quo ſunt datæ lineæ ; ita ut vertex ſit punctum ad rectum angulum : & à ſectione ad diametrum applicatæ in angulo dato, poſſint rectangula adiacentia alteri lineæ, quæ latitudinem habeant lineam, inter ipſas & verticem ſectionis interiectam ; deficiantque figura ſimili, & ſimiliter poſita ei, quæ datis rectis lineis continetur.

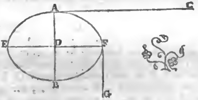
SINT datæ rectæ lineæ A B , A C ad rectos angulos conſtitutæ , quarum maior A B . Itaque oportet in ſubiecto plano deſcribere ellipſim ; ita ut eius diameter ſit A B , vertex A , & rectum latus A C : ductæ verò à ſectione ad A B in dato angulo applicentur ; & poſſint ſpatia adiacentia lineæ A C, quæ latitudines habeant lineas , interiectas inter ipſas & punctum A ; deficiantque figura ſimili , & ſimiliter poſita ei , quæ lineis B A , A C continetur . Sit datus angulus primùm rectus ;
& ex linea A B planum attollatur , re-
ctum ad ſubiectū planum; in quo ad AB
circuli portio ADB deſcripta bifariā di-
vidatur in D ; & iungantur D A, D B:
ponatur autem ipſi AC æqualis A X;&
per X ducatur X O æquidiſtans B D; &
per O ipſa O F æquidiſtans A B; iuncta-
que D F conveniat cum AB producta in
7. quinti. puncto E . erit igitur ut B A ad A C,
4. ſexti. ita B A ad A X , hoc eſt D A ad A O ,
hoc eſt D E ad E F : deinde iungantur
A F , F B , & producantur ; ſumatur-
que in F A quodvis punctum G; & per
G ipſi D E æquidiſtans ducatur G L ,
quæ cum A B producta conveniat in
K: denique producatur F O; & conve-
niat cum G K in L . Quoniam igitur
26. tertii. circunferentia A D æqualis eſt ipſi D
B : & angulus A B D angulo D F B
32. primi. æqualis erit. & quoniam angulus E FA
æqualis eſt duobus angulis F A D ,
F D A. atque eſt F A D angulus æqua-
lis angulo F B D , & F D A ipſi F B A. erit angulus E F A æqualis angulo D B A,
29. primi. hoc eſt B F D . ſed cùm D E æquidiſtet ipſi L G ; & angulus E F A æqualis eſt an-
6. primi. gulo F G H , & D F B ipſi F H G . quare ſequitur , ut F G H angulus angulo



F H G

F H G ſit æqualis, & linea F G lineæ F H. itaque circa G H deſcribatur circulus G H N, rectus ad triangulum H G F: & intelligatur conus, cuius baſis circulus G H N, & vertex punctum F. erit is conus rectus, quòd G F æqualis ſit F H. & quoniam circulus G H N rectus eſt ad H G F planum. eſt autem & planum ſubiectum rectum ad planum, quod per G H F tranſit. communis ipſorum ſectio ad 19. undecimi. planum per G H F perpendicularis erit. communis autem ſectio ſit linea K M. ergo K M perpendicularis eſt ad utranque ipſarum A K, K G. rurſus quoniam conus, cuius baſis eſt circulus G H N, & vertex F, ſecatur plano per axem, quod facit ſectionem triangulum G H F. ſecatur autem & altero plano per A K, K M tranſeunte, quod eſt ſubiectum planum, ſecundùm rectam lineam K M, perpendicularem ad G K: & planum occurrit ipſis G F, F H lateribus coni. erit facta 13. huius. ſectio ellipſis, cuius diameter A B: ductæ verò à ſectione ad A B in recto angulo applicabuntur: ſunt enim ipſi K M æquidiſtantes. & quoniam ut D E ad E F, ita rectangulum D E F, hoc eſt B E A ad quadratum E F. rectangulum autem B E A 36. tertii. ad quadratum E F compoſitam proportionem habet ex proportione B E ad E F, & ex proportione A E ad E F: utque B E ad E F, ita B K ad K H, hoc eſt F L ad 4. sexti. L H: & ut A E ad E F, ita A K ad K G, hoc eſt F L ad L G. habebit B A ad A A C proportionem compoſitam ex proportione F L ad L G, & ex proportione F L ad L H: quæ quidem proportio eadem eſt, quam habet quadratum F L ad G L H rectangulum. ergo ut B A ad A C, ita F L quadratum ad rectangulum G L H. quod cùm ita ſit, linea A C rectum erit figuræ latus, ut oſtenſum eſt in decimo tertio theoremate.

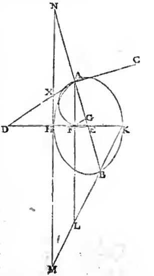
IISDEM poſitis, ſit linea A B minor ipſa A C: & oporteat circa diametrum A B ellipſim deſcribere; ita ut A C rectum ſit figuræ latus. Secetur A B bifariam in D; à quo ad rectos angulos ipſi A B ducatur E D F; & rectangulo B A C æquale ſit quadratum F E, & linea F D æqualis D E: lineæ verò A B æquidiſtans ducatur F G; & fiat, ut C A ad A B, ita E F ad F G. maior eſt igitur E F, quàm F G. Itaque quoniam rectangulum C A B æquale eſt quadrato E F: ut C A ad B A B, ita eſt quadratum F E ad quadratum A B, & quadratum F D ad D A qua- 15. quinti dratum. ut autem C A ad A B, ita E F ad F G. ergo ut E F ad F G, ita quadratum F D ad quadratum D A. ſed quadratum F D æquale eſt rectangulo F D E. quare ut E F ad F G, ita rectangulum E D F ad D A quadratum. Duabus igitur rectis lineis terminatis, aptatiſque ad rectos inter ſe angulos, quarum maior eſt E F, deſcribatur ellipſis; ita ut E F



diameter ſit, & F G rectum figuræ latus. tranſibit utique ſectio per A; quoniam ut rectangulum F D E ad quadratum D A, ita eſt E F ad F G, atque eſt A D æqualis D B. tranſibit igitur etiam per B: ac propterea el- D lipſis circa A B deſcripta erit. & quoniam ut C A ad A B, ita quadratum F D ad quadratum D A. atque eſt quadratum D A rectangulo A D B æquale. erit ut C A ad A B, ita D F quadratum ad rectangulum A D B. quare A C rectum eſt figuræ latus. C

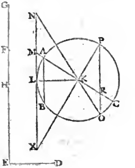
SED non ſit datus angulus rectus; ſitque ipſi æqualis B A D: & ſecta E A B bifariam in E, circa lineam A E ſemicirculus A F E deſcribatur; in quo ipſi A D æquidiſtans ducatur F G; ita ut faciat proportionem quadrati F G ad rectangulum A G E eandem, quam habet linea C A ad A B: & iunctæ A F, E F producantur: & ſumatur ipſarum D E, E F media pro-

portionalis E H, cui æqualis ponatur E K: fiat autem quadrato A F æquale rectangulum H F L; iungaturque K L; & per H ipſi H F ad rectos angulos ducatur M H X, æquidiſtans ipſi A F L;
31. tertii. rectus eſt enim angulus, qui ad F. Itaque datis duabus rectis lineis terminatis, & ad rectos inter ſe angulos K H, H M, deſcribatur ellipſis, cuius diameter tranſverſa K H, & rectum figuræ latus H M: ductæ verò à ſectione ad H K in recto angulo applicentur. tranſibit igi-
13. huius. tur ſectio per A; quia quadratum F A rectangulo H F L eſt æquale. & quoniam H E æqualis eſt E K, & A E ipſi E B; tranſibit & per B ſectio; cuius quidem centrum E, diame-
F ter A E B, & linea D A ſectionem continget; propterea quòd rectangulum D E F æquale eſt quadrato E H. eſt autem ut C A ad A B, ita F G quadratum ad rectangulum A G E. ſed C A ad A B proportionem habet compoſitam ex proportione C A ad duplam A D, & ex proportione duplæ A D ad A B, hoc eſt ex proportione D A ad A E. quadratum verò F G ad rectangulum A G E compoſitam proportionem habet ex proportione F G ad G E, & ex proportione F G ad G A. ergo proportio, compoſita ex proportione C A ad duplam A D, & ex proportione D A ad A E, eadem eſt, quæ componitur ex proportione F G ad G E, & proportione F G ad G A. ſed ut
4. ſexti. D A ad A E, ita F G ad G E. ergo ſublata communi proportione, erit ut C A
G ad duplam A D, ita F G ad G A, hoc eſt X A ad A N. quando autem hoc ita ſit, linea A C rectum eſt figuræ latus.



EVTOCIVS.

E ET ſecta A B bifariam in E, circa lineam A E ſemicirculus A F E deſcribatur; in quo ipſi A D æquidiſtans ducatur F G; ita ut faciat proportionem quadrati F G ad rectangulum A G E eandem, quam habet linea C A ad A B.] *Sit ſemicirculus A B C, in quo recta linea quæpiam A B; ponanturque duæ rectæ lineæ inæquales D E, E F; & producatur E F ad G, ut ſit F G æqualis D E; & E G in H bifariam dividatur: ſumpto autem circuli centro K, ab eo ducatur perpendicularis ad A B, quæ circunferentiæ circuli occurrat in L; perque L ipſi A B æquidiſtans ducatur L M; & K A producta conveniat cum L M in puncto M: deinde fiat, ut H F ad F G, ita L M ad M N; atque ipſi L N æqualis ſit L X; & iuncta N K, K X producantur adeo, ut à completo circulo ſecentur in punctis O, P; & iungatur O R P. Quoniam igitur ut H F ad F G, ita eſt L M ad M N: componendo erit, ut H G ad G F, ita L N ad N M: & convertendo ut F G ad G H, ita M N ad N L,*



ut

ut autem F G ad G E, ita M N ad N X: & dividendo ut G F ad F E, ita N M ad M X. quòd cùm N L æqualis ſit L X, communiſque & ad rectos angulos L K; erit & K N æqualis K X. & eſt K O ipſi K P æqualis. æquidiſtans igitur eſt N X ipſi O P: atque ob id triangulum K M N ſimile triangulo K R O: & triangulum K M X ipſi K R P. ergo ut K M ad K R, ita M N ad R O. ſed ut K M ad K R, ita M X ad P R. quare ut M N ad R O, ita M X ad P R: & permutando ut N M ad M X, ita O R ad R P. ut autem N M ad M X, ita G F ad F E, hoc eſt D E ad E F; & ut O R ad R P, ita quadratum O R ad rectangulum O R P. ergo ut D E ad E F, ita O R quadratum ad rectangulum O R P; atque eſt rectangulum O R P rectangulo A R C 35. tertii.
æquale, ut igitur D E ad E F, ita quadratum O R ad rectangulum A R C.

FED. COMMANDINVS.

HABEBIT B A ad A C proportionem compoſitam.] *Superiùs nanque demon-* A
ſtratum eſt B A ad A C ita eſſe, ut D E ad E F.

ITAQVE quoniam rectangulum C A B æquale eſt quadrato E F; ut C A ad B
A B, ita eſt quadratum F E ad quadratum A B.) *Cùm enim rectangulum C A B quadrato E F ſit æquale. erit ut C A ad E F, ita E F ad A B. quare ut C A ad A B,* 14. ſexti
ita quadratum C A ad quadratum E F, hoc eſt quadratum E F ad A B quadratum. cor. 20. ſexti.

TRANSIBIT utique ſectio per A; quoniam ut rectangulum F D E ad qua- C
dratum D A, ita eſt E F ad F G.] *Ex vigeſima prima propoſitione huius.*

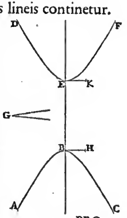
QVARE A C rectum eſt figuræ latus.] *Ex eadem vigeſima prima.* D

ET linea D A ſectionem continget; propterea quòd rectangulum D E F F
æquale eſt quadrato E H.) *Ex ijs, quæ nos demonſtravimus in trigeſimam octavam propoſitionem huius libri.*

QVANDO autem hoc ita ſit, linea A C rectum eſt figuræ latus.) *Ex quinquageſima* G
propoſitione huius.

PROBLEMA IV. PROPOSITIO LV.

DATIS duabus rectis lineis terminatis, atque ad rectos inter ſe angulos, invenire oppoſitas ſectiones; quarum diameter ſit una datarum linearum, & vertices lineæ termini: applicatæ verò ab utraque ſectione in dato angulo poſſint ſpatia adiacentia alteri lineæ, excedentiaque figura ſimili ei, quæ datis lineis continetur.



SINT datæ rectæ lineæ terminatæ ad rectos inter ſe angulos B E, B H: & datus angulus ſit G. Oportet utique circa unam linearum B E, B H ſectiones oppoſitas deſcribere; ita ut ductæ à ſectione lineæ in angulo G applicentur. Datis igitur duabus rectis lineis B E, B H, deſcribatur hyperbole A B C; cuius diameter tranſverſa ſit B E, & rectum figuræ latus H B: ductæ verò ad lineam, quæ in directum ipſi B E conſtituitur, applicentur in angulo G; quod quomodo fieri oporteat, iam dictum eſt. Ducatur per E linea E K ad rectos angulos ipſi B E, quæ ſit æqualis B H; & deſcribatur ſimiliter alia hyperbole D E F; ita ut eius diameter ſit B E, rectum figuræ latus E K; & ductæ à ſectione ordinatim applicentur in angulo qui deinceps eſt ipſi G. conſtat igitur B, E ſectiones eſſe oppoſitas, quarum diameter eſt una; duo verò recta latera inter ſe æqualia.

PRO-

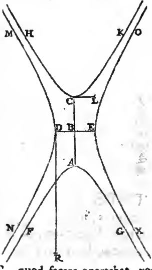
PROBLEMA V. PROPOSITIO LVI.

DATIS duabus rectis lineis, ſeſe bifariam ſecantibus, circa utranque ipſarum ſectiones oppoſitas deſcribere; ita ut rectæ lineæ ſint coniugatæ diametri: & quarumlibet oppoſitarum ſectionum diameter poſſit figuram aliarum oppoſitarum.

SINT datæ rectæ lineæ, bifariam ſe invicem ſecantes, A C, D E. Oportet iam circa utranque ipſarum diametrum oppoſitas ſectiones deſcribere; ita ut A C, D E coniugatæ ſint in ipſis: & D E quidem poſſit figuram earum, quæ circa A C ſunt; A C verò figuram earum poſſit, quæ circa D E. Sit quadrato D E æquale rectangulum A C L; ſitque L C ipſi C A ad

55. huius. rectos angulos: & duabus datis rectis lineis, ad rectos inter ſe angulos conſtitutis, A C, C L, deſcribantur oppoſitæ ſectiones F A G, H C K; quarum diameter tranſverſa ſit C A, & rectum latus C L: ductæ autem à ſectionibus ad C A in dato angulo ap-

diff. ſec. diamet. plicentur. erit ipſa D E ſecunda diameter oppoſitarum ſectionum: quòd mediam proportionem habeat inter latera figuræ; & ordinatim applicatæ æquidiſtans ad B bifariam ſecetur. Sit rurſus quadrato A C æquale rectangulum E D R: & ſit R D ad rectos angulos ipſi D E. Itaque datis duabus rectis lineis, ad rectos inter ſe angulos, E D, D R, ſectiones oppoſitæ, M D N, O E X deſcribantur; quarum tranſverſa diameter D E, & D R rectum figuræ latus: ductæ verò à ſectionibus applicentur ad D E in dato angulo. linea A C ſecunda diameter erit ſectionum M D N, O E X, ergo A C lineas ipſi D E æquidiſtantes inter ſectiones F A G, H C K bifariam ſecat; D E verò æquidiſtantes ipſi A C, quod facere oportebat. vocentur autem huiuſmodi ſectiones coniugatæ.



E V T O C I V S.

SCRIPSIMVS in commentarijs in decimum theorema, quod nam fuerit propoſitum Apollonio in primis treſdecim theorematibus: & in commentarijs in ſextum decimum de tribus ſequentibus dictum eſt. At verò in ſeptimo decimo aſſerit Apollonius rectam lineam, quæ per verticem ducitur, ordinatim applicatæ æquidiſtans, extra ſectionem cadere. In decimo octavo lineam, quæ utcunque contingenti æquidiſtans intrà ſectionem ducitur, ipſam ſecare. In decimo nono lineam, quæ ducitur ab aliquo puncto diametri, ordinatim applicatæ æquidiſtans, cum ſectione convenire. In vigeſimo, & in vigeſimo primo lineas in ſectionibus ordinatim applicatas inquirit, quomodo inter ſe ſe habeant: itemque diametri portiones, quæ ab ipſis fiunt. In vigeſimo ſecundo, & vigeſimo tertio tractat de linea, quæ in duobus punctis ſectioni occurrit. In vigeſimo quarto, & vigeſimo quinto de ea, quæ ipſi occurrit in uno puncto tantùm, hoc eſt de linea, quæ ſectionem contingit. In vigeſimo ſexto de ea, quæ diametro parabolæ, & hyperbolæ æquidiſtans

Digitized by Google

ſtans ducitur. In vigeſimo ſeptimo de linea ſecante parabolæ diametrum, quippe quæ ex utraque parte ſectioni occurrat. In vigeſimo octavo de ea, quæ æquidiſtans ducitur contingenti unam oppoſitarum ſectionum. In vigeſimo nono de ea, quæ per centrum oppoſitarum ſectionum tranſiens producitur. In trigeſimo de linea tranſeunte per centrum ellipſis, & oppoſitarum ſectionum, quæ producta à centro bifariam dividitur. In trigeſimo primo de linea hyperbolen contingente, quæ quidem diametrum ſecat inter centrum, & verticem ſectionis. In trigeſimo ſecundo, trigeſimo tertio, trigeſimo quarto, trigeſimo quinto, & trigeſimo ſexto de lineis contingentibus agitur. In trigeſimo ſeptimo de contingentibus, & de ijs, quæ à tactu applicantur in hyperbola, & ellipſi. In trigeſimo octavo de contingentibus hyperbolen, & ellipſim, quo pacto ſe habeant ad ſecundam diametrum. In trigeſimo nono, & quadrageſimo de ijſdem agit, compoſitas ex his proportiones inquirens. In quadrageſimo primo de parallelogrammis deſcriptis ab applicata, & ea, quæ ex centro hyperbolæ, & ellipſis. In quadrageſimo ſecundo aſſerit triangulum in parabola, ex contingente & applicata factum, æquale eſſe ei parallelogrammo, quod, cùm æqualem altitudinem habeat, in dimidia baſi conſtituitur. In quadrageſimo tertio inquirit in hyperbola & ellipſi, quomodo ſe habeant inter ſeſe triangula, quæ à contingentibus & applicatis fiunt. In quadrageſimo quarto idem inquirit in oppoſitis ſectionibus. In quadrageſimo quinto itidem in ſecunda diametro hyperbolæ & ellipſis. In quadrageſimo ſexto de alijs parabolæ diametris, quæ ſunt poſt diametrum principalem. In quadrageſimo ſeptimo de alijs diametris hyperbolæ & ellipſis. In quadrageſimo octavo de alijs diametris oppoſitarum ſectionum. In quadrageſimo nono de lineis, iuxta quas poſſunt applicatæ ad alias parabolæ diametros. In quinquageſimo de ijſdem in hyperbola & ellipſi. In quinquageſimo primo de ijſdem in oppoſitis ſectionibus. Itaque cùm hæc ſcripſiſſet, addidiſſetque epilogum quendam, in quinquageſimo ſecundo problema illud oſtendit; quomodo parabole in plano deſcribatur. In quinquageſimo tertio, quomodo deſcribatur hyperbole. In quinquageſimo quarto, quomodo ellipſis. In quinquageſimo quinto, quomodo oppoſitæ ſectiones. In quinquageſimo ſexto, quomodo deſcribantur oppoſitæ ſectiones illæ, quas coniugatas appellamus.

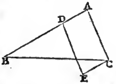
PRIMI LIBRI FINIS.

Digitized by Google

PAPPI ALEXANDRINI
LEMMATA IN SECUNDUM LIBRUM CONICORUM APOLLONII.

LEMMA PRIMUM.

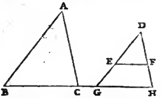
DATIS duabus rectis lineis AB, BC, & data recta DE, in ipſas AB, BC coaptare lineam, ipſi DE æqualem & æquidiſtantem.



Hoc autem manifeſtum eſt. nam ſi per E ducatur EC æquidiſtans AB; & per C ipſi DE æquidiſtans
34. primi. ducatur CA: erit ACED parallelogrammum: & propterea AC ipſi DE & æqualis & æquidiſtans; quæ quidem in datas rectas lineas AB, BC coaptata erit.

LEMMA II.

SINT duo triangula ABC, DEF; ſitque ut AB ad BC, ita DE ad EF: & AB quidem ſit æquidiſtans DE; BC verò ipſi EF. Dico & AC ipſi DF æquidiſtantem eſſe.



Producatur enim BC; & conveniat cum
29. primi. DE, DF in punctis G, H. eſt igitur angulus E æqualis angulo G, hoc eſt ipſi B; propterea quòd duæ lineæ AB, BC duabus
4. ſexti. DE, EF æquidiſtant. Itaque quoniam ut AB ad BC, ita eſt DE ad EF. & anguli ad B, E ſunt æquales. erit angulus C æqualis angulo F, hoc eſt angu-
28. primi. lo H. ergo linea AC ipſi DH eſt æquidiſtans.

LEMMA III.

SIT recta linea AB; ſintque æquales AC, DB: & inter CD ſuma-

tur

tur quodvis punctum E: Dico rectangulum A D B unà cum rectangulo C E D æquale eſſe rectangulo A E B.

SECETVR enim C D bifariam in F, quomodocunque ſe habeat ad E punctum. Et quoniam rectangulum A D B unà cum quadrato F D æquale eſt quadrato F B. 5. ſecũdi.
quadrato autem F D rectangulum C E D unà cum quadrato F E eſt æquale: & quadrato F B æquale rectangulum A E B unà cum quadrato F E. erit rectangulum A D B, unà cum rectangulo C E D & quadrato F E, æquale rectangulo A E B & quadrato F E. commune auferatur quadratum F E. reliquum igitur A D B rectangulum unà cum rectangulo C E D æquale eſt rectangulo A E B.



L E M M A IV.

SIT recta linea A B; & æquales ſint A C, D B: & inter C D quodvis punctum E ſumatur. Dico rectangulum A C B æquale eſſe rectangulo C E D, & rectangulo D A C.

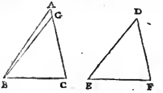
SECETVR enim C D in F bifariam, quomodocunque ſe habeat ad punctum E. Quare tota A F ipſi F B eſt æqualis. rectangulum igitur A E B unà cum quadrato E F æquale eſt quadrato A F. ſed rectangulum D A C unà cum C F quadrato quadrato A F eſt æquale. ergo rectangulum A E B unà cum quadrato E F æquale eſt rectangulo D A C, & C F quadrato. quadratum autem C F eſt æquale rectangulo C E D, & quadrato E F. quare ſublato communi, nempe quadrato E F, erit, quod relinquitur, rectangulum A E B æquale rectangulo C E D, & rectangulo D A C. 5. ſecundi 6.



L E M M A V.

SINT duo triangula A B C, D E F: & ſit angulus quidem C æqualis angulo F, angulus verò B angulo E maior. Dico lineam B C ad C A minorem proportionem habere, quàm E F ad F D.

CONSTITVATVR enim angulus C B G æqualis angulo E. & eſt angulus C angulo F æqualis. ergo ut B C ad C G, ita E F ad F D. ſed B C ad C A minorem habet proportionem, quàm B C ad C G, quare & B C ad C A minorem proportionem habebit, quàm E F ad F D. 4. ſexti. 8. quinti.

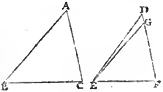


L E M M A VI.

HABEAT rurſus B C ad C A maiorem proportionem, quàm E F

 ad

ad F D: & ſit angulus C æqualis angulo F. Dico angulum B angulo E minorem eſſe.

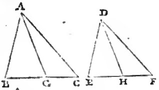


QVONIAM enim B C ad C A maiorem proportionem habet, quàm E F ad F D: ſi ſiat, ut B C ad C A, ita E F ad aliam quandam; erit ea minor, quàm F D. itaque ſit F G: & E G iungatur. cùm igitur circa æquales an-
6. ſexti. gulos latera proportionalia ſint; angulus B eſt æqualis angulo F E G: & propterea angulo E minor erit.

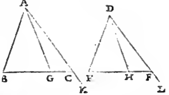
LEMMA VII.

SINT triangula ſimilia A B C, D E F: & ducantur A G, D H; ita ut ſit rectangulum B C G ad quadratum C A, ſicut rectangulum E F H ad quadratum F D. Dico triangulum A G C triangulo D H F ſimile eſſe.

QVONIAM enim eſt, ut rectangulum B C G ad quadratum C A, ita rectan-
23. ſexti. gulum E F H ad quadratum F D. & proportio rectanguli B C G ad quadratum C A compoſita eſt ex proportione B C ad C A, & proportione G C ad C A: proportio autem rectanguli E F H ad quadratum F D componitur ex proportione E F ad F D, & proportione H F ad F D; quarum quidem proportio B C ad C A eadem eſt, quæ E F ad F D, propter ſimilitudinem triangulorum. erit reliqua G C ad C A eadem, quæ H F ad F D. & ſunt circa æquales angulos latera
6. ſexti. proportionalia. ergo triangulum A C G triangulo D F H ſimile erit. Hoc igitur ex coniuncta proportione in eum, quem diximus, modum demonſtratur: ſed licet & aliter demonſtrare abſque coniuncta proportione.



ALITER. Ponatur enim rectangulo B C G
14. ſexti. æquale rectangulum A C K. ergo ut B C ad C K, ita A C ad C G. rurſus ponatur rectangulo E F H æquale rectangulum D F L. erit ut E F ad F L, ita D F ad F H. ſed poſitum eſt, ut rectangulum B C G, hoc eſt
lemm. 22. decim. rectangulum A C K ad quadratum A C, videlicet ut A C ad C K, ita rectangulum E F H, hoc eſt D F L ad quadratum D F, videlicet ut D F ad F L. ut autem B C ad C A, ita
22. quinti E F ad F D, ob ſimilitudinem triangulorum, ergo ut B C ad C K, ita E F ad F L: ſed ut B C ad C K, ita A C ad C G, quod demonſtratum eſt: itemque ut E F ad F L, ita D F ad F H. quare ut A C ad C G, ita erit D F ad F H. & ſunt circa æquales angulos. triangulum igitur A C G ſimile eſt triangulo D F H: & eadem ratione triangulum A G B triangulo D H E; quòd & A B C triangulum ipſi D E F ſimile ſit.

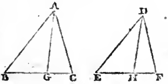


LEMMA VIII.

SIT triangulum quidem A B C ſimile triangulo D E F; triangulum

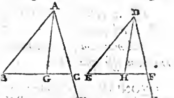
verò

verò A B G triangulo D E H ſimile. Dico ut rectangulum B C G ad quadratum C A, ita eſſe rectangulum E F H ad quadratum F D.



QVONIAM enim propter ſimilitudinem triangulorũ totus angulus A toti D eſt æqualis, angulus autem BAG æqualis eſt angulo EDH. erit reliquus GAC reliquo HDF æqualis. ſed & angulus C eſt æqualis angulo F. eſt igitur ut G C ad C A, ita H F ad F D. ut autem B C ad C A, ita E F ad F D. ergo & compoſita proportio compoſitæ proportioni eadem erit: icircoque ut rectangulum B C G ad quadratum C A, ita rectangulum E F H ad quadratum F D. 4. sexti.

ALITER ABSQVE CONIVNCTA PROPORTIONE.



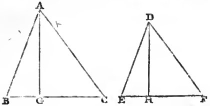
PONATVR rectangulo B C G æquale rectangulum A C K, & rectangulo E F H æquale rectangulum D F L: erit rurſus ut B C ad C K, ita A C ad C G. ut autem E F ad F L, ita D F ad F H: & eadem ratione, qua ſupra, demonſtrabimus, ut A C ad C G, ita eſſe D F ad F H. ergo ut B C ad C K, ita E F ad F L. ſed ut B C ad C A, ita E F ad F D ob triangulorum ſimilitudinem. ex æquali igitur ut K C ad C A, hoc eſt ut rectangulum K C A, hoc eſt rectangulum B C G ad quadratum C A, ita L F ad F D, hoc eſt rectangulum L F D, hoc eſt rectangulum E F H ad quadratum F D. quod demonſtrare oportebat.

LEMMA IX.

SIMILITER demonſtrabimus; ſi ut rectangulum B C G ad quadratum A C, ita fuerit rectangulum E F H ad quadratum F D: & triangulum A B C ſimile triangulo D E F: & triangulum A B G triangulo D E H ſimile eſſe.

LEMMA X.

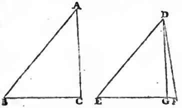
SINT duo triangula ſimilia A B C, D E F: & ducantur perpendiculares A G, D H. Dico, ut rectangulum B G C ad quadratum A G, ita eſſe rectangulum E H F ad quadratum D H.



HOC autem ex ijs, quæ ſupra dicta ſunt, perſpicuè conſtat.

LEMMA XI.

SIT æqualis quidem angulus B angulo E, angulus verò A angulo D minor. Dico C B ad B A minorem proportionem habere, quàm F E ad E D.

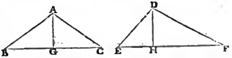


QVONIAM enim angulus A minor eſt angulo D; conſtituatur angulo A æqualis angulus E D G. eſt igitur ut C B ad B A, ita G E ad E D. ſed G E ad E D minorem habet proportionem, quàm F E ad E D. ergo & C B ad B A minorem proportionem habebit, quàm F E ad E D. ſimiliter & omnia alia eiuſmodi oſtendemus.

LEMMA XII.

SIT ut rectangulum B G C ad quadratum A G, ita rectangulum E H F ad quadratum D H: & ſit B G quidem æqualis G C; C G verò ad G A minorem proportionem habeat, quàm F H ad H D. Dico F H maiorem eſſe ipſa H E.

QVONIAM enim quadratum C G ad quadratum G A minorem proportionem habet, quàm quadratum F H ad quadratum H D. quadratum autem C G æquale eſt rectangulo B G C. habebit B G C rectangulum ad quadratum A G minorem proportionem, quàm quadratum F H ad quadratum H D, ſed ut B G C rectangulum ad quadratum A G,



ita poſitum eſt rectangulum E H F ad quadratum H D, ergo rectangulum E H F ad quadratum H D minorem proportionem habet, quàm quadratum F H ad
8. quinti quadratum H D. maius igitur eſt quadratum F H rectangulo E H F, quare & linea F H maior erit linea H E.

APOL-

APOLLONII PERGÆI

CONICORUM LIBER II.

CUM COMMENTARIIS EUTOCII ASCALONITÆ, ET FEDERICI COMMANDINI.

APOLLONIUS EUDEMO S. D.

SI vales bene eſt; ego quidem ſatis commodè habeo. Apollonio filio meo dedi, ut ad te perferret, ſecundum librum conicorum, quæ à nobis conſcripta ſunt. Tu eum diligenter percurres: & communicabis cum ijs, qui eo tibi digni videbuntur. Philonidæ etiam Geometræ, quo cum tibi Epheſi amicitiam conciliavi, ſi quando in iſtæc Pergami loca venerit, legendum dabis: & tu cura, ut valeas.

THEOREMA I. PROPOSITIO I.

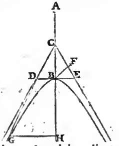
SI hyperbolen recta linea ad verticem contingat; & ab ipſo ex utraque parte diametri ſumatur æqualis ei, quæ poteſt quartam figuræ partem: lineæ, quæ à ſectionis centro ad ſumptos terminos contingentis ducuntur, cum ſectione non convenient.

SIT hyperbole, cuius diameter A B; centrum C, & rectum figuræ latus B F; linea verò D E ſectionem contingat in B: & quartæ parti figuræ, quæ continetur lineis A B, B F, æquale ſit quadratum utriuſque ipſarum D B,

BE:

Digitized by Google

BE: iunctæ CD, CE producantur. Dico eaſ tum ſectione non convenire. Si enim fieri poteſt; conveniat CD cum ſectione in G: & à G ordinatim applicetur GH. ergo GH æquidiſtans eſt ipſi DB. Et quoniam lem. in 22. decimi. ut AB ad BF, ita eſt quadratum AB ad rectangulum ABF. quadratum autem CB quarta pars eſt quadrati AB: & quadratum BD itidem quarta pars rectanguli 15. quinti. ABF. erit ut AB ad BF, ita quadratum CB ad A BD quadratum, hoc eſt quadratum CH ad quadra- B tum HG. ſed ut AB ad BF, ita eſt rectangulum AHB ad quadratum HG. quare ut CH quadra- 9. quinti. tum ad quadratum HG, ita rectangulum AHB ad HG quadratum. ex quibus ſequitur rectangu- C lum AHB quadrato CH æquale eſſe: quod eſt abſurdum. ergo CD cum ſectione non convenit. ſimiliter demonſtrabitur neque ipſam CE convenire cum ſectione. ſunt igitur lineæ D CD, CE aſymptoti, hoc eſt eum ſectione non convenientes.



E V T O C I V S.

EXPLICATVRVS ſecundum librum conicorum, amiciſſime Anthemi, illud prædicere oportere exiſtimo, me ea tantummodo in ipſum conſcribere, quæ ex primo libro intelligi non poſſunt. Primum theorema caſum non habet. lineæ enim DC, CE ſectionis aſymptoti cùm ſint, eadem manent in omni tum diametro, tum linea contingente.

FED. COMMANDINVS.

A HOC eſt quadratum CH ad quadratum HG.) *Quoniam enim ponitur, lineam CD productam cum ſectione convenire in G: erit, ex quarta ſexti, ut CB ad BD, ita GH ad HG, quare ex vigeſima ſecunda eiuſdem, ut quadratum CB ad BD quadratum, ita quadratum CH ad quadratum HG.*

B Sed ut AB ad BF, ita eſt rectangulum AHB ad quadratum HG.) *Ex vigeſima prima primi libri huius.*

C Quod eſt abſurdum.) *Eſt enim quadratum CH æquale rectangulo AHB unà cum quadrato BC, ex ſexta ſecundi libri elementorum.*

D Sunt igitur lineæ CD, CE aſymptoti, hoc eſt eum ſectione non convenientes.) *Has Græci* ἀσυμπτώτους τῇ τομῇ, *vel ſimpliciter* ἀσυμπτώτους *appellant. quare nobis deinceps, ut uno verbo dicamus, Græca voce uti liceat.*

THEOREMA II. PROPOSITIO II.

IISDEM manentibus, demonſtrandum eſt non eſſe alteram aſymptoton, quæ angulum DCE dividat.

SI enim fieri poteſt; ſit CH: & per B ipſi CD æquidiſtans ducatur BH, quæ eum CH in H puncto conveniat; ipſi verò BH ponatur æqualis DG; 33. primi. & iuncta GH ad K, L, M producatur. Quoniam igitur BH, DG æquales ſunt & æquidiſtantes: & ipſæ DB, GH æquales & æquidiſtantes ſint, ne- 6. ſecundi ceſſe eſt. ſecatur autem AB bifariam in C: & ipſi adiungitur quædam linea BL. ergo rectangulum ALB unà eum CB quadrato æquale eſt quadrato

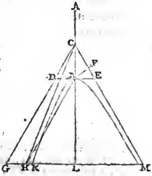
drato C L. ſimiliter quoniam G M ipſi D E æquidiſtat. atque eſt D B æqualis B E. & G L ipſi L M æqualis erit. quòd cùm G H ſit æqualis D B: erit G K ipſa D B maior. eſtque K M maior B E, quoniam & ipſa L M. rectangulum igitur M K G maius eſt rectangulo D B E, hoc eſt quadrato D B. & quoniam ut A B ad B F, ita eſt quadratum C B ad B D quadratum. ut autem A B ad B F, ita A L B rectangulum ad quadratum L K. erit, ut quadratũ C B ad B D quadratum, ita A L B rectangulum ad quadratum L K. ſed ut quadratum C B ad quadratum B D, ita quadratum C L ad quadratum L G. ergo ut quadratum C L ad quadratum L G, ita A L B rectangulum ad quadratum L K. itaque cùm ſit, ut totum quadratum C L ad totum quadratum L G, ita ablatum rectangulum A L B ad ablatum quadratum L K: erit reliquum quadratum C B ad reliquum rectangulum M K G, ut quadratum C L ad quadratum L G, hoc eſt ut quadratum C B ad B D quadratum. ergo rectangulo M K G æquale eſt quadratum B D: quod fieri non poteſt. oſtenſum eſt enim eo maius. non igitur linea C H aſymptotos eſt, videlicet cum ſectione non conveniens.

A B C D E

21. primi. huius. 11. quinti

4. & 21. ſexti.

9. quinti.



EVTOCIVS.

HOC theorema caſum non habet: ſiquidem linea B H ſectionem omnino in duobus punctis ſecat. Quoniam enim æquidiſtans eſt C D, cum ipſa C H conveniet. quare prius cum ſectione conveniat, neceſſe eſt.

FED. COMMANDINVS.

SIMILITER quoniam G M ipſi D E æquidiſtat. atque eſt D B æqualis B E. & G L ipſi L M æqualis erit.] *Ex ijs, quæ nos demonſtravimus in commentarijs in ſextam propoſitionem primi libri huius.* A

Erit G K ipſa D B maior.] *Nam cùm ponatur C H aſymptotos; punctum H extra ſectionem cadet, videlicet extra punctum K: & iccirco linea G K maior erit, quàm G H, hoc eſt quàm D B.* B

Eſtque K M maior B E, quoniam & ipſa L M.] *Eſt enim in triangulo C L M, ut C L ad L M, ita C B ad B E: & permutando ut L C ad C B, ita L M ad B E. ſed L C maior eſt C B. ergo & L M maior B E. atque eſt K M maior L M. multò igitur K M ipſa B E maior erit.* C

ET quoniam ut A B ad B F, ita eſt quadratum C B ad B D quadratum.) *Ex demonſtratis in prima propoſitione huius libri.* D

Itaque cùm ſit, ut totum quadratum C L ad totum quadratum L G, ita ablatum rectangulum A L B ad ablatum quadratum L K: erit reliquum, &c.) *Quoniam enim rectangulum A L B unà cum quadrato C B æquale eſt quadrato C L: ſi à quadrato C L auferatur rectangulum A L B; reliquum erit C B quadratum. rurſus quoniam recta linea G M ſecatur in partes æquales in L, & in partes inæquales in K: rectangulum M K G unà cum quadrato L K æquale eſt quadrato L G. ergo ſi à quadrato L G auferatur L K quadratum; relinquetur rectangulum M K G. cùm igitur ſit, ut quadratum C L ad quadratum L G, hoc eſt ut totum ad totum, ita rectangulum A L B ad quadratum L K, ablatum ſcilicet ad ablatum; erit reliquum ad reliquum, hoc eſt quadratum C B ad rectangulum M K G, ut totum ad totum.* E

6. ſecundi

5. ſecundi

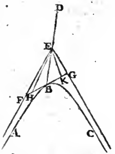
19. quinti

THE-

THEOREMA III. PROPOSITIO III.

SI hyperbolen contingat recta linea; cum utraque aſymptoton conveniet, & ad tactum biſariam ſecabitur: quadratum verò utriuſque eius portionis æquale erit quartæ parti figuræ, quæ ad diametrum per tactum ductam conſtituitur.

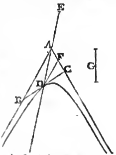
SIT hyperbole ABC, cuius centrum E; & aſymptoti ſint FE, EG: quædam verò recta linea HK ſectionem contingat in puncto B. Dico HK productam cum lineis FE, EG convenire. Si enim fieri poteſt, non conveniat; & iuncta BE producatur: ſitque ipſi BE
47. primi huius. æqualis ED. diameter igitur eſt BD. ponatur quartæ
1. huius. parti figuræ, quæ eſt ad BD æquale quadratum utriuſque ipſarum HB, BK: & iungantur HE, EK. Ergo
2. huius. HE, EK aſymptoti ſunt; quod fieri nequit. poſitum eſt enim aſymptotos eſſe FE, EG. quare HK producta cum ipſis FE, EG convenit. Itaque conveniat in punctis F, G. Dico quadratum utriuſque ipſarum FB, BG æquale eſſe quartæ parti figuræ, quæ fit ad BD. Non enim: ſed ſi fieri poteſt, ſit quartæ parti eius figuræ æquale quadratum utriuſque ipſarum HB, BK. Aſymptoti igitur ſunt HE, EK; quod eſt abſurdum. ergo quadratum utriuſque FB, BG æquale eſt quartæ parti figuræ, quæ ad ipſam BD conſtituitur.



PROBLEMA I. PROPOSITIO IV.

DATIS duabus rectis lineis angulum continentibus, & puncto intra angulum dato, deſcribere per punctum coni ſectionem, quæ hyperbole appellatur; ita ut datæ lineæ ipſius aſymptoti ſint.

SINT duæ rectæ lineæ AB, AC, angulum ad A continentes; ſitque datum punctum D: & oporteat per D circa aſymptotos BAC hyperbolen deſcribere. Iungatur AD, & ad E producatur; ita ut DA ſit æqualis AE: & per D ipſi AB æquidiſtans ducatur DF; ponaturque AF æqualis FC: iuncta verò CD producatur ad B: & quadrato CB æquale fiat rectangulum ex DE & G. deinde producta AD, circa
53. primi huius. ipſam per D hyperbole deſcribatur; ita ut applicatæ ad diametrum poſſint rectangula adiacentia lineæ G: excedentiaque figura ipſi DEG ſimili. Quoniam igitur æquidiſtans eſt DF ipſi BA. & CF æqualis FA.
2. ſexti. erit CD ipſi DB æqualis. ergo quadratum CB quadruplum eſt quadrati CD. atque eſt quadratum CB æquale rectangulo DEG. utrunque igitur quadratorum BD, DC quarta pars eſt
1. huius. figuræ, quæ lineis DE, G continetur. quare BA, AC deſcriptæ hyperbolæ aſymptoti ſunt.



FED.

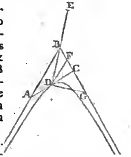
FED. COMMANDINVS.

HOC problema ab Apollonio conſcriptum non eſt, ſed ab alio aliquo additum: quod ex Eutocij verbis perſpicuè apparet. is enim in commentarijs in quartam propoſitionem ſecundi libri Archimedis de ſphara & cylindro ita ſcribit. ὡς δὲ δεῖ διὰ τοῦ δοθέντος σημείου περὶ τὰς δοθείσας ἀσυμπτώτους γράψαι ὑπερβολὴν, δείξομεν οὕτως, ἐπειδὴ οὐκ αὐτόθεν κεῖται ἐν τοῖς κωνικοῖς στοιχείοις. *id eſt, quo autem modo oporteat per datum punctum circa datas aſymptotos deſcribere hyperbolen, demonſtrabimus in hunc modum: quoniam id per ſe ipſum in conicis elementis non ponitur. Subiungit poſtea Eutocius demonſtrationem eandem, qua hoc loco habetur, ut credibile ſit, vel Eutocium ipſum, vel alium ex Eutocio hoc problema inſeruiſſe. Adde, quòd Pappus inter lemmata, qua conſcripſit in quintum librum conicorum Apollonij, idem problema per reſolutionem, compoſitionemque explicauit; quod minimè feciſſet, niſi ab ipſo Apollonio illud fuiſſet omiſſum. ſed Pappi lemma apponere libuit.*

DUABUS rectis lineis A B, B C poſitione datis, & dato puncto D, per D circa aſymptotos A B, B C hyperbolen deſcribere.

FACTVM iam ſit. Ergo B eſt ipſius centrum: iungatur D B, & producatur, quæ diameter erit: ponaturque ipſi D B æqualis B E. datum igitur eſt punctum B. quare & punctum E dabitur, & diametri terminus. ducatur à puncto D ad lineam B C perpendicularis D F. ergo punctum F datum erit. rurſus ponatur ipſi B F æqualis F C; erit & C datum: & iuncta C D producatur ad A, quæ poſitione data erit. ſed & poſitione data eſt A B. quare & ipſum A. eſt autem & C datum. ergo linea A C poſitione dabitur: atque erit A D æqualis D C; propterea quòd B F eſt æqualis F C. Itaque figuræ, quæ ad diametrum E D conſtituitur, ſit D G rectum latus. erit utraque ipſarum A D, D C poteſtate quarta pars rectanguli eius, quod E D G continetur. ſed & quarta pars eſt quadrati A C. rectangulum igitur E D G quadrato A C eſt æquale. datum autem eſt A C quadratum. ergo & datum rectangulum E D G. & data eſt E D. quare ipſa D G, & punctum G datur. Quoniam igitur poſitione datis duabus rectis lineis in plano E D, D G, quæ ad rectos inter ſe angulos conſtituuntur; & à dato puncto D facta eſt ſectio hyperbole; cuius diameter quidem eſt E D, vertex autem D punctum: & à ſectione ad diametrum applicatæ in dato angulo A D B applicantur; & poſſunt ſpatia adiacentia ipſi D G, latitudineſque habentia lineas ex diametro abſciſſas, quæ inter ipſas & punctum D interijciuntur; excedentia figura ſimili ei, quæ lineis E D G continetur: erit ipſa ſectio poſitione data.

A
B C
D
27. Dat.
25.
E
2. ſexti.
F
G
H



COMPONETVR autem problema in hunc modum. Sint duæ rectæ lineæ A B, B C poſitione datæ: & datum punctum D; iunctaque D B producatur ad E, ut ſit B E ipſi D B æqualis; & ducatur perpendicularis D F, ponaturque ipſi B F æqualis F C; & iuncta C D ad A producatur; atque ipſi E D aptetur ad rectos angulos D G; ita ut quadrato A C æquale ſit rectangulum E D G: & deſcribatur hyperbole circa diametrum D E, ut in reſolutione dictum eſt. Dico iam factum eſſe, quod proponebatur. Quoniam enim B F eſt æqualis F C: erit & A D ipſi D C æqualis. quare utraque ipſarum A D, D C poteſtate eſt quarta pars quadrati A C, hoc eſt rectanguli E D G, hoc eſt figuræ, quæ ad diametrum conſtituitur. demonſtratum autem eſt in ſecundo libro conicorum lineas A B, B C ipſius hyperbolæ aſymptotos eſſe. propoſ. 1.

K
L

A DATVM igitur eſt punctum B.) *Ex vigeſima quinta libri Datorum. ſunt enim A B, B C poſitione data.*

B Quare & punctum E dabitur.] *Ex vigeſima ſeptima eiuſdem libri.*

C Ducatur à puncto D ad lineam B C perpendicularis D F.] *Videtur hic locus corruptus eſſe. non enim ducenda eſt D F ad ipſam B C perpendicularis; niſi quando linea A B, B C rectum angulum continent: quippe cùm neceſſe ſit, lineam D F ipſi A B æquidiſtare, ut ex proximè dictis apparet. Legendum igitur eſt hoc modo. Ducatur à puncto D ad B C linea D F, quæ ipſi A B æquidiſtet; & ita legendum erit infra: alioqui non ſequeretur A D æqualem eſſe D C; propterea quòd B F ſit æqualis F C.*

D Ergo punctum F datum erit.) *Ex vigeſima quinta libri Datorum. nam & linea D F poſitione datur.*

E Ergo linea A C poſitione dabitur.] *Ex vigeſima ſexta eiuſdem.*

F Erit utraque ipſarum A D, D C poteſtate quarta pars rectanguli eius, quod E D G continetur.] *Deſideratur in Græco codice τέταρτῳ, vel δ.*

G Quare ipſa D G, & punctum G datur.] *Eſt enim, ex decima quarta vel*
2. Dator. 26. *decima ſeptima ſexti, ut E D ad A C, ita A C ad D G. & data eſt A C. ergo & ipſa D G. eſtque datum punctum D. quare & G dabitur.*

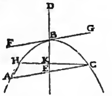
H Et poſſunt ſpatia adiacentia ipſi D G.) *In Græco codice mendoſè legebatur G A.*

K Et ducatur perpendicularis D F.] *Legendum, ut diximus, & ducatur D F ipſi A B æquidiſtans.*

L Et deſcribatur hyperbole circa diametrum D E.) *Ex quinquageſima tertia primi libri huius.*

THEOREMA IV. PROPOSITIO V.

SI parabolæ, vel hyperbolæ diameter lineam quandam bifariam ſecet: quæ ad terminum diametri contingit ſectionem, æquidiſtans eſt lineæ bifariam ſectæ.



SIT parabole, vel hyperbole A B C, cuius diameter D B E; & linea F B G ſectionem contingat: ducatur autem quædam linea A E C in ſectione, faciens A E æqualem E C. Dico A C æquidiſtantem eſſe ipſi F G. Niſi enim ita ſit; ducatur per C ipſi F G æquidiſtans C H: & iungatur H A. Quoniam igitur parabole, vel hyperbole eſt A B C, cuius diameter quidem D E, contingens autem F G. atque ipſi F G æquidiſtat C H. erit C K æqualis H K. ſed & C E ipſi E A eſt æqualis. ergo A H æquidiſtans eſt K E; quod fieri non poteſt. producta enim cum ipſa B D convenit.

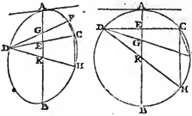
46. primi huius. 2. ſexti. 22. primi huius.

THEOREMA V. PROPOSITIO VI.

SI ellipſis, vel circuli circunferentiæ diameter lineam quandam non per centrum tranſeuntem bifariam ſecet: quæ ad terminum diametri contingit ſectionem, æquidiſtans erit bifariam ſectæ lineæ.

SIT

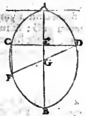
SIT ellipſis, vel circuli circunferentia, cuius diameter A B: & A B lineam C D non tranſeuntem per centrum bifariam ſecet in E. Dico lineam, quæ ad A ſectionem contingit, ipſi C D æquidiſtantem eſſe. Non enim: ſed ſi fieri poteſt, ſit lineæ ad A contingenti æquidiſtans D F. Æqualis igitur eſt D G ipſi G F: eſt autem & D E æqualis E C. ergo C F ipſi G E æquidiſtat; quod eſt abſurdum. ſiue enim punctum G centrum ſit ſectionis A B; linea C F cum diametro A B conueniet: ſiue non ſit. Ponatur centrum K: iunctaque D K producatur ad H; & iungatur C H. Quoniam igitur D K æqualis eſt K H. & D E ipſi E C. erit C H æquidiſtans A B. ſed & C F eidem æquidiſtat; quod eſt abſurdum. ergo quæ ad A ſectionem contingit, ipſi C D eſt æquidiſtans.



47. primi. huius.
2. sexti.
A
B

FED. COMMANDINVS.

SIVE enim punctum G centrum ſit ſectionis A B; linea C F cum diametro A B conueniet: ſiue non ſit.) *Si linea, ad A ſectionem contingens, non æquidiſtat ipſi C D; ſit linea contingenti ad A æquidiſtans D G F; & iungatur F C: ponatur autem primum G ſectionis centrum eſſe. Itaque D G æqualis eſt G F. & eſt D E æqualis E C. ergo F C ipſi G E æquidiſtat; quod eſt abſurdum. linea enim, quæ tranſit per centrum, contingenti ad A æquidiſtans, diameter eſt ipſi A B coniugata: & propterea F C, quæ ellipſim, vel circulum ſecat inter duas diametros, cum utriſque conueniet, ex vigeſima tertia primi huius. Si verò G non ſit centrum ſectionis; idem abſurdum ſequetur. nanque F C, itidem inter duas diametros ſecans, cum ipſis cõueniat neceſſe eſt.* A



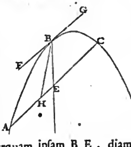
4. diff. ſecundarũ.

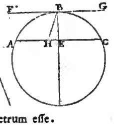
Ponatur centrum K; iunctaque D K producatur ad H.) *Si D F per centrum non tranſeat, ſit centrum K; & ducta D K H, iungatur H C. erit D K æqualis K H. eſt autem & D E æqualis E C. quare H C æquidiſtat ipſi A B. ſed eidem æquidiſtat C F; quod eſt abſurdum. quoniam cùm F C cum C H, quæ eſt æquidiſtans A B, conuenit; & cum ipſa A B neceſſariò conueniet, ex ſecunda propoſitione primi libri Vitellionis. Adde, quòd aliud abſurdum ſequitur, videlicet lineas H C, C F, uni & eidem A B æquidiſtantes, etiam inter ſeſe æquidiſtare; quæ tamen in puncto C conueniunt.* B 30. primi. huius. 30. primi.

THEOREMA VI. PROPOSITIO VII.

SI coni ſectionem, vel circuli circunferentiam recta linea contingat; & huic æquidiſtans ducatur in ſectione, & bifariam diuidatur: quæ à tactu ad punctum lineam bifariam diuidens iungitur, ſectionis diameter erit.

SIT coni ſectio, vel circuli circunferentia A B C, quam contingat recta linea F G: & ipſi F G æquidiſtans ducatur A C; biſariamque in E dividatur; & iungatur B E. Dico B E ſectionis eſſe diametrum. Non enim: ſed ſi fieri poteſt, ſit diameter B H. Ergo A H ipſi H C eſt æqualis, quod eſt abſurdum. eſt enim A E æqualis E C. non igitur B H diameter erit ſectionis. ſimiliter demonſtrabimus nullam aliam, præterquam ipſam B E, diametrum eſſe.

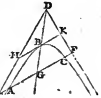




THEOREMA VII. PROPOSITIO VIII.

SI hyperbolæ recta linea occurrat in duobus punctis: producta ex utraque parte cum aſymptotis conveniet; & lineæ, quæ ex ipſa abſciſſæ, inter ſectionem & aſymptotos interijciuntur, æquales erunt.

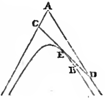
SIT hyperbole A B C, cuius aſymptoti ſint E D, D F; & ipſi A B C occurrat quædam recta linea A C. Dico A C productam ex utraque parte cum aſymptotis convenire. Secetur enim A C
7. huius. biſariam in G: & iungatur D G. diameter igitur eſt ſe-
5. huius. ctionis. quare linea ad B contingens ipſi A C æquidiſtat:
3. huius. ſit autem contingens H B K, quæ conveniet cum ipſis
2. primi. Vitell. E D, D F. Quoniam igitur A C æquidiſtat K H. & K H convenit cum K D, D H. & A C cum E D,
6. primi huius. D F conveniet. itaque conveniat in punctis E, F. eſt autem H B æqualis B K. ergo F G ipſi G E: & propterea F C ipſi A E æqualis erit.



THEOREMA VIII. PROPOSITIO IX.

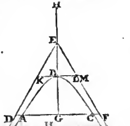
SI recta linea, aſymptotis occurrens, ab hyperbola biſariam ſecetur: in uno tantùm puncto ſectionem contingit.

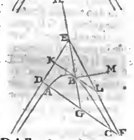
RECTA enim linea C D, occurrens aſymptotis C A, A D, ſecetur ab hyperbola biſariam in puncto E. Dico C D in alio puncto ſectionem non contingere. Si
8. huius. enim fieri poteſt, contingat in B. Ergo C B æqualis eſt B D: quod eſt abſurdum. poſuimus enim C E ipſi E D æqualem eſſe. non igitur C D in alio puncto ſectionem contingit.



THEOREMA IX. PROPOSITIO X.

SI recta linea ſectionem ſecans cum utraque aſymptoton conveniat: rectangulum contentum rectis lineis, quæ inter aſymptotos & ſectionem interijciuntur, æquale eſt quartæ parti figuræ factæ ad diametrum, quæ æquidiſtantes ipſi ductæ lineæ bifariam dividit.





SIT hyperbole A B C, cuius aſymptoti D E, E F; & ducatur quædam recta li- A
nea D F, ſectionem & aſymptotos ſecans: dividatur
autem A C bifariam in G; iunctaque G E, ponatur ipſi
B E æqualis E H; & à puncto B ducatur B M ad an-
gulos rectos ipſi H E B: deinde fiat, ut rectangulum
H G B ad A G quadratum, ita linea H B ad B M.
diameter igitur eſt B H, & B M rectum figuræ latus. B
Dico rectangulum D A F æquale eſſe quartæ parti fi-
guræ, quæ lineis H B, B M continetur: ſimiliter ei-
dem eſſe æquale rectangulum D C F. Ducatur enim
per B linea K B L ſectionem contingens, quæ æquidi- C
ſtans erit ipſi D F. Itaque quoniam demonſtratum eſt, D
ut H B ad B M, ita eſſe quadratum E B ad B K qua-
dratum, hoc eſt quadratum E G ad quadratum G D.
ut autem H B ad B M, ita rectangulum H G B ad E
quadratum A G. erit, ut totum quadratum E G ad F
totum quadratum G D, ita ablatum rectangulum
H G B ad ablatum quadratum G A. ergo reliquum
quadratum E B ad reliquum rectangulum D A F eſt,
ut quadratum E G ad quadratum G D, hoc eſt ut
quadratum E B ad B K quadratum. æquale igitur eſt 9.quinti.
rectangulum D A F quadrato B K: ſimiliter demon-
ſtrabitur & rectangulum D C F quadrato B L æquale.
& eſt quadratum K B æquale quadrato B L. ergo & D A F rectangulum rectan- G H
gulo D C F æquale erit.

FED. COMMANDINVS.

ET ducatur quædam recta linea D F, ſectionem & aſymptotos ſecans.] *Intelligendum lineam D F ſectionem in punctis A, C ſecare.* A

Diameter igitur eſt B H, & B M rectum figuræ latus.) *Ex vigeſima prima primi libri huius, ſive eius converſa.* B

Quæ æquidiſtans erit ipſi D F.] *Ex quinta huius.* C

Itaque quoniam demonſtratum eſt, ut H B ad B M, ita eſſe quadratum E B ad B K quadratum.) *In prima huius.* D

Vt autem H B ad B M, ita rectangulum H G B ad quadratum A G.] *Ex poſitione.* E

Erit, ut totum quadratum E G ad totum quadratum G D.) *Vide, quæ ſcripſimus in ſecundam huius.* F

Et eſt quadratum K B æquale quadrato B L.) *Eſt enim linea K B æqualis ipſi B L, ex tertia huius.* G

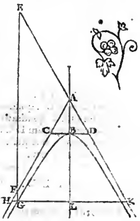
Ergo

H Ergo & D A F rectangulum rectangulo D C F æquale erit.] *Ex quibus ſequitur illud, quod demonſtrare oportebat, videlicet unũquodque rectangulorum*
3. huius. *D A F, D C F æquale eſſe quadrato K B, vel B L, hoc eſt quartæ parti figuræ, quæ lineis H B, B M continetur.*

THEOREMA X. PROPOSITIO XI.

A SI utranque linearum continentium angulum, qui deinceps eſt angulo hyperbolen continenti, ſecet recta linea: in uno tantùm puncto cum ſectione conveniet; & rectangulum conſtans ex ijs, quæ interijciuntur inter lineas angulum continentes & ſectionem, æquale erit quartæ parti quadrati ex diametro, quæ ſecanti lineæ æquidiſtans ducitur.

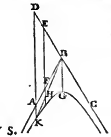
SIT hyperbole, cuius aſymptoti C A, A D: & producta D A ad E, per aliquod punctum E ducatur E F, quæ lineas E A, A C ſecet; perſpicuum eſt E F in uno tantùm puncto cum ſectione convenire. nam quæ per A ipſi E F æquidiſtans duci-
B C tur, ut A B, ſecat angulum C A D: proptereaque conveniet cum ſectione; & ipſi-
D us diameter erit. quare E F cum ſectione conveniet in uno tantùm puncto. conveniat in G. Dico rectangulum E G F quadrato A B æquale eſſe.
E Ducatur enim per G ordinatim H G L K. ergo, quæ in puncto B ſectionem contingit, æquidiſtans
F eſt ipſi H G: ſit autem C D. Itaque quoniam C B eſt æqualis B D; quadratum C B, hoc eſt rectan-
23. ſexti. gulum C B D ad B A quadratum proportionem habet compoſitam ex proportione C B ad B A, &
4. ſexti. ex proportione D B ad B A. ſed ut C B ad B A, ita H G ad G F: & ut D B ad B A, ita K G ad G E. ergo proportio quadrati C B ad quadratum B A compoſita eſt ex proportione H G ad G F, &
23. ſexti. proportione K G ad G E. proportio autem rectanguli K G H ad rectangulum E G F ex eiſdem proportionibus componitur. quare ut rectangulum K G H ad rectangulum E G F, ita quadratum C B ad B A quadratum: & permutando ut rectangulum K G H ad quadratum C B, ita re-
G ctangulum E G F ad quadratum A B. ſed demon-
14. quinti ſtratum eſt rectangulum K G H æquale quadrato C B. ergo & E G F rectangulum quadrato A B æquale erit.



EVTOCIVS.

IN aliquibus exemplaribus hoc theorema aliter demonſtratur. Sit hyperbole, cuius aſymptoti A B, B C; producaturque in rectum B E D: & ducatur E F, ut contingit, ſecans lineas B D, B A. Dico E F cum ſectione convenire. Si enim fieri poteſt; non conveniat: & per B ipſi
H E F æquidiſtans ducatur B G. ergo B G diameter eſt ſectionis. conſtitua-
tur

tur ad lineam E F parallelogrammum, quadrato B G æquale; excedens figura quadrata, quod ſit E H F: & iuncta B H producatur. conveniet ea cum ſectione. conveniat in K: & per K ducatur K A D æquidiſtans B G. ergo rectangulum D K A quadrato B G eſt æquale: & ideo æquale rectangulo E H F; quod eſt abſurdum. conſtat igitur E F cum ſectione convenire: atque in uno tantùm puncto; quoniam diametro B G eſt æquidiſtans. K L



FED. COMMANDINVS.

SI utraque linearum continentium angulum, qui deinceps eſt angulo hyperbolen continenti.) *Angulum hyperbolen continentem vocat Apollonius eum, quem aſymptoti inter ſeſe conſtituunt: reliquum verò ex duobus rectis, eum qui deinceps eſt, appellat; qui quidem una aſymptoton & altera producta continetur.* A

Proptereaque conveniet cum ſectione.] *Ex ſecunda huius.* B

Et ipſius diameter erit.] *Ex corollario quinquageſima prima primi huius.* C

Quare E F cum ſectione convenit in uno tantùm puncto.] *Ex vigeſima ſexta primi huius.* D

Ergo quæ in puncto B ſectionem contingit, æquidiſtans eſt ipſi H G.) *Ex quinta huius.* E

Itaque quoniam C B eſt æqualis B D.) E*x tertia huius.* F

Sed demonſtratum eſt rectangulum K G H æquale quadrato C B.) *In decima huius.* G

IN ALIAM DEMONSTRATIONEM, QVAM AFFERT EVT.

CONSTITVATVR ad lineam E F parallelogrammum, quadrato B G æquale, excedens figura quadrata, quod ſit E H F.] *Ex vigeſima nona ſexti elementorum.* H

Conveniet ea cum ſectione.) *Ex ſecunda huius.* K

Ergo rectangulum D K A quadrato B G eſt æquale.) *Ex ijs, quæ proximè dicta ſunt. quare ſi quis hanc demonſtrationem loco præcedentis eſſe velit; neceſſe habebit illud ipſum ſimiliter demonſtrare.* L

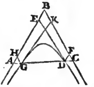
Quod eſt abſurdum.] *Poſt hæc verba in Græco codice non nulla deſiderantur, qualia fortaſſe hæc ſunt: Linea enim D K maior eſt, quàm E H: & K A maior, quàm H F. Illud verò perſpicuè apparet. nam ut B K ad K D, ita eſt B H ad H E: & permutando ut K B ad B H, ita K D ad H E. rurſus ut B K ad K A, ita B H ad H F: permutandoque ut K B ad B H, ita K A ad H F. ſed eſt B K maior, quàm B H. maior igitur eſt D K, quàm E H: & K A itidem maior, quàm H F.* M

THEOREMA XI. PROPOSITIO XII.

SI ab aliquo puncto eorum, quæ ſunt in ſectione ad, aſymptotos duæ rectæ lineæ in quibuslibet angulis ducantur; & ab altero puncto in ſectione ſumpto ducantur aliæ lineæ his ipſis æqui-

æquidiſtantes: rectangulum ex æquidiſtantibus conſtans æquale eſt ei, quod fit ex ijs, quibus illæ æquidiſtantes ductæ fuerant.

SIT hyperbole, cuius aſymptoti A B, B C; & ſumatur in ſectione aliquod punctum D; atque ab eo ad lineas A B, B C ducantur D E, D F: ſumatur autem & alterum punctum G in ſectione; per quod ducantur G H, G K ipſis D E, D F æquidiſtantes. Dico rectangulum E D F rectangulo H G K æquale eſſe. Iungatur enim D G, & ad puncta A, C pro-



10. huius. ducatur. Itaque quoniam æquale eſt rectangulum

14. ſexti. A D C rectangulo A G C; erit ut G A ad A D, ita D C

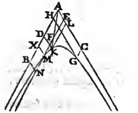
4. ad C G. ſed ut G A ad A D, ita G H ad D E: & ut

16. ſexti. D C ad C G, ita D F ad G K. quare ut G H ad D E, ita D F ad G K. rectangulum igitur E D F rectangulo H G K eſt æquale.

THEOREMA XII. PROPOSITIO XIII.

A SI in loco, aſymptotis & ſectione terminato, quædam recta linea ducatur, alteri aſymptoton æquidiſtans: in uno puncto tantùm cum ſectione conveniet.

SIT hyperbole, cuius aſymptoti C A, A B: ſumaturque aliquod punctum E; & per E ipſi A B æquidiſtans ducatur E F. Dico E F cum ſectione convenire. Si enim fieri poteſt; non conveniat: & ſumatur punctum G in ſectione, per quod ipſis B A, A C æquidiſtantes ducantur G C, G H: & rectangulo C G H æquale fit rectangulum A E F; iunctaque A F, ſi



2. huius. producatur, cum ſectione conveniet. conveniat in puncto K: & per K ducantur K L, K D ipſis B A,

B A C æquidiſtantes. Ergo rectangulum C G H æquale eſt rectangulo L K D. ponitur autem & rectangulo A E F æquale. rectangulum igitur D K L, hoc eſt A L K rectangulo A E F æquale erit; quod fieri non poteſt: ſiquidem K L maior eſt, quàm E F; & L A maior, quàm A E. quare E F conveniet cum ſectione. Conveniat in M. Dico eam in alio puncto non convenire. Nam ſi fieri poteſt; conveniat etiam in N: & per M, N ipſi C A æquidiſtantes ducantur M X, N B. Ergo rectangulum E M X rectangulo E N B eſt æquale; quod eſt abſurdum. non igitur in alio puncto cum ſectione conveniet.

FED. COMMANDINVS.

A SI in loco, aſymptotis & ſectione terminato, quædam recta linea ducatur.) *Locum intelligit extra ſectionem, qui aſymptotis & ſectione ipſa circũſcribitur.*

B Ergo rectangulum C G H æquale eſt rectangulo L K D.) *Ex præmiſſa.*

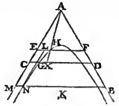
THEOREMA XIII. PROPOSITIO XIV.

ASYMPTOTI, & ſectio in infinitum productæ ad ſe ipſas pro-

Digitized by Google

propiùs accedunt; & ad intervallum perveniunt minus quolibet dato intervallo.

SIT hyperbole, cuius aſymptoti A B, A C; & datum intervallum ſit K. Dico aſymptotos A B, A C & ſectionem productas ad ſeſe propiùs accedere; & pervenire ad intervallum minus intervallo K. Ducantur enim lineæ contingenti æquidiſtantes E H F, C G D: iungaturque A H; & ad X producatur. Quoniam ergo rectangulum C G D rectangulo F H E eſt æquale; erit ut D G ad F H, ita H E ad C G. ſed D G maior eſt F H. ergo & E H ipſa C G eſt maior. ſimiliter demonſtrabimus eas, quæ deinceps ſequuntur, minores eſſe. itaque ſumatur intervallum E L minus intervallo K: & per L ipſi A C æquidiſtans ducatur L N. ergo L N cum ſectione conveniet. conveniat in N: perque N ducatur M N B æquidiſtans E F. quare M N eſt æqualis E L: & propterea intervallo K minor erit.



A
14. ſexti.
14. quinti
B
14. primi.

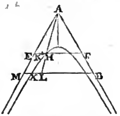
EX hoc manifeſtum eſt, lineas A B, A C ad ſectionem accedere propiùs, quàm omnes aliæ aſymptoti: & angulum B A C minorem eſſe quolibet angulo, qui alijs eiuſmodi lineis continetur. C D

E V T O C I V S.

IN aliquibus exemplaribus illud aliter demonſtratum invenitur.

ASYMPTOTOS & ſectionem pervenire ad intervallum minus quolibet intervallo dato.

IISDEM enim manentibus, ſumatur intervallum E K dato intervallo minus: fiatque ut K E ad E H, ita H A ad A L: & per L ipſi E F æquidiſtans ducatur M X L B. Quoniam igitur X B ad H F maiorem proportionem habet; quàm L B ad H F. ut autem X B ad H F, ita H E ad M X; propterea quòd rectangulum F H E rectangulo B X M eſt æquale. habebit H E ad M X maiorem proportionem, quàm L B ad H F. ſed ut L B ad H F, ita L A ad A H: & ut L A ad A H, ita H E ad E K. quare H E ad M X maiorem proportionem habet, quàm H E ad E K. minor igitur eſt M X, quàm E K.



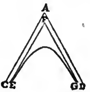
8. quinti.
14. ſexti.
10. huius.
4. ſexti.
8. quinti.

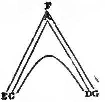
INVENIVNTVR in aliquibus codicibus etiã hæc theoremata, quæ à nobis tanquã ſupervacanea ſublata ſunt. Quoniam enim demonſtratum eſt, aſymptotos propiùs accedere ad ſectionem, & ad intervallum pervenire, quolibet dato intervallo minus; ſupervacuum fuit hæc inquirere; quòd neque demonſtrationes aliquas habent, ſed duntaxat figurarum differentias: verùm ut ijs, qui in hæc inciderint, ſententiam noſtram aperiamus; exponantur hoc loco ea, quæ nos, ut ſupervacanea ſuſtulimus. 14. huius.

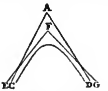
M ASYM-

ASYMPTOTI, de quibus dictum eſt, propiùs accedunt ad ſectionem, quàm aliæ, ſi quæ ſint, aſymptoti.

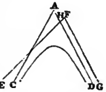
SIT hyperbole, cuius aſymptoti C A, A D. Dico C A, A D ad ſectionem accedere propiùs, quàm aliæ aſymptoti, ſi quæ ſint. Nanque ut in prima figura, lineas E F, F G aſymptotos eſſe non poſſe, manifeſtè conſtat: quòd linea E F æquidiſtans ſit
13. huius. C A, & F G ipſi A D. demonſtratum ſiquidem eſt eas, quæ in loco aſymptotis &





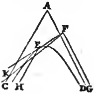


ſectione terminato ducuntur, alteri aſymptoto æquidiſtantes, cum ſectione convenire. Si verò, ut in ſecunda figura apparet, E F, F G ſint aſymptoti; quippe quæ ipſis C A, A D æquidiſtant: tamen C A, A D ad ſectionem propiùs accedunt, quàm E F, F G. Quòd ſi, ut in tertia figura, C A, A D in infinitum producantur; ad ſectionem propiùs accedunt, & ad intervallum perveniunt minus quolibet dato intervallo: ſed E F, F G, quanquam in puncto F, & intra angulum propinquiores ſint ſectioni; tamen productæ ab ipſa magis recedunt. intervallum enim, quo nunc diſtant, eſt quolibet alio intervallo minus. Rurſus ſint aſymptoti E F, F G, ut in quarta figura: conſtat etiam hoc modo C A propinquiorem eſſe ſectioni, quàm E F: ſive E F æquidiſtans ſit C A; ſive cum ipſa conveniat. & ſi quidem punctum, in quo convenit cum A C, ſit infra eam, quæ per F ſectionem contingit; ſecabit E F ſectionem ipſam: ſi verò ſit in loco intermedio inter contingentem & angulum; non perveniet ad intervallum minus dato intervallo. quare C A propinquior eſt ſectioni, quàm E F: & A D propinquior, quàm F G; per eadem, quæ diximus in tertia figura.



AT verò lineam, quæ convenit cum A C infra eam, quæ per F ducta ſectionem contingit, cum ſectione ipſa convenire, ſic demonſtrabitur.

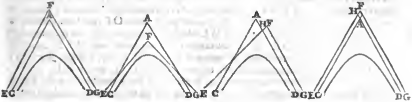
CONTINGAT F E ſectionem in E: & punctum, in quo E F cum C A convenit, ſit ſupra F K. Dico F K convenire cum ſectione. Ducatur enim per tactum E ipſi C A aſymptoto
13. huius. æquidiſtans E H. ergo E H ſectionem in puncto E tantùm ſecat. Itaque quoniam A C ipſi E H eſt æquidiſtans. & F K convenit cum A C. & cum E H conveniat, neceſſe eſt. quare & cum ipſa ſectione.



SI eſt alter angulus rectilineus, qui hyperbolen contineat; non eſt minor angulo hyperbolen continente, de quo ante dictum eſt.

SIT

SIT hyperbole, cuius aſymptoti C A, A D: aliæ verò aſymptoti ſint E F, F G: Dico angulum ad F non minorem eſſe angulo ad A. Sint enim primùm E F, F G ipſis C A, A D æquidiſtantes. ergo angulus ad F non eſt minor eo, qui ad A. Si verò non ſint æquidiſtantes, ut in ſecunda figura; conſtat maiorem eſſe angulum ad F angulo C A D. Sed in tertia figura angulus F H A, eo, qui ad A, maior eſt; & qui ad F æqualis eſt angulo F H A. Denique in quarta figura angulus, qui ad verticem, maior eſt angulo, qui itidem ad verticem conſtituitur. non igitur angulus ad F angulo, qui ad A, minor erit.



FED. COMMANDINVS.

QVONIAM ergo rectangulum C G D rectangulo F H E eſt æquale.] *Ex decima huius. utrunque enim eſt æquale quartæ parti figuræ, quæ ad diametrum conſiſtit.* A

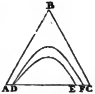
Ergo L N cum ſectione conveniet.) *Ex decima tertia huius.* B

Ex hoc manifeſtum eſt lineas A B, A C ad ſectionem accedere propiùs, quàm omnes aliæ aſymptoti.) *Hoc demonſtravit Eutocius in commentarijs: aſymptotos autem vocat etiam alias lineas, quæ cum ſectione non conveniunt.* C

Et angulum B A C minorem eſſe quolibet angulo, qui aliis eiuſmodi lineis continetur.] *Non conſentit hoc cum ijs, quæ tradit Eutocius. oſtendit enim angulum, qui alijs eiuſmodi lineis continetur, non eſſe minorem angulo B A C. quare vel locus corrigendus eſt; vel intellige punctum, in quo aliæ aſymptoti conveniunt, idem eſſe, quod A; vel in ipſis aſymptotis, vel etiam intra ipſas contineri. ita enim fiet, ut angulus B A C quolibet alio eiuſmodi angulo ſit minor. Illud autem, quod hoc loco demonſtratur accidere aſymptotis & ſectioni, ut ſcilicet in infinitum producta non coeant, ſed ad ſeipſas propius accedant, & ad intervallum perveniant quolibet dato intervallo minus, accidit etiam duabus hyperbolis, quæ circa eaſdem aſymptotos deſcribuntur; quod Pappus demonſtrare aggreſſus eſt in lemmatibus in quintum librum conicorum Apollonij: ſed quoniam ea demonſtratio ob temporum iniurias & depravata eſt & manca; non inutile erit verba ipſius Latinè reddita in medium afferre: ut, quæ perobſcura ſunt, explicemus; quæ verò ad demonſtrationem deſiderari videntur, ſuppleamus. eſt enim res admirabilis, & diligenti contemplatione digniſſima.* D

PAPPI LEMMA.

CIRCA aſymptotos A B, B C hyperbolæ D E, D F deſcribantur. Dico eas inter ſe non convenire.



SI enim fieri poteſt; conveniant ad punctum D: & per D in ſectiones ducatur recta linea A D E F C. Erit propter D E ſectionem linea A D æqualis F C: & propter ſectionem D E erit A D æqualis E C. quare F C ipſi C E eſt æqualis; quod fieri non poteſt. non igitur ſectiones inter ſe conveniunt.

 DICO

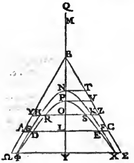
DICO præterea eas, ſi in infinitum augeantur, ad ſeſe propiùs accedere, & ad minus intervallum pervenire.

A B C DVCATVR enim alia linea H K: & ſit diameter, cuius terminus M. Erit igitur, ut rectangulum M L N ad quadratum L G, ita tranſverſum figuræ latus ad la-
D tus rectum. ut autem M O P rectangulum ad quadratum O R, ita tranſverſum la-
E tus ad rectum. ergo ut rectangulum M L N ad quadratum L G, ita rectangulum
F M O P ad quadratum O R: & permutando. rectangulum verò M L N maius eſt
G rectangulo M O P. quare linea G F maior erit, quàm R S. atque eſt propter ſectio-
H nes F D G æquale rectangulo K R H. minor igitur eſt G D, quàm H R. quare
K ſemper ad minus intervallum perveniunt. Sed & illud facilè conſtare poteſt. ſi enim utraque ipſarum ad aſymptotos propiùs accedit: & ad ſeſe propiùs accedant neceſſe eſt.

COMMENTARIVS.

A DVCATVR enim linea H K.) *Sint duæ hyperbolæ G N F, D P E circa eaſdem aſymptotos A B, B C deſcriptæ, ut docetur in quarta propoſitione huius libri: & intelligantur rectæ lineæ A G D L E F C, H R O S K ad earum diametrum B L ordinatim applicatæ; quæ inter ſe æquidiſtabunt. utraque enim æquidiſtat lineæ in P vel N ſectionem contingenti, ex quinta huius.*

B Et ſit diameter, cuius terminus M.] *Non poteſt idem terminus eſſe diametri utriuſque ſectionis. Producatur enim L P N B diameter in puncta M, Q; ita ut ſit M B æqualis ipſi B N, & B Q æqualis B P: erit punctum M terminus diametri ſectionis G N F, & Q terminus diametri ſectionis D P E; quòd B ſit utriuſque centrum. quare mirum videtur, Pappum uno eodemque puncto M uti pro termino utriuſque diametri: niſi fortaſſe intelligamus duo puncta, qui termini ſunt, eadem litera notari. quod novum eſt, & inuſitatum.*



C Erit igitur, ut rectangulum M L N ad quadratum L G, ita tranſverſum figuræ latus ad latus rectum.] *Ex vigeſima prima primi libri huius.*

D Vt autem M O P rectangulum ad quadratum O R, ita tranſverſum latus ad rectum.) *Hoc eſt ut rectangulum Q O P ad quadratum O R, ita figura, quæ fit ad P Q diametrum ſectionis D P E, tranſverſum latus ad rectum. alia enim ſunt huius figuræ latera, atque ea, de quibus proximè dictum eſt: quanquam eandem inter ſe proportionem habeant. nam ut figura, quæ fit ad N M diametrum ſectionis G N F, tranſverſum latus ad rectum, ita eſt figura, ad diametrum P Q ſectionis D P E, tranſverſum latus ad rectum; quod facilè demonſtrabitur hoc modo. Ducatur linea N T ſectionem G N F contingens in N: & ducatur P V, quæ ſectionem D P E contingat in P. æquidiſtabunt N T* (5. huius.) *P V inter ſeſe. utraque enim æquidiſtat lineæ A C, vel H K: & fient triangula B N T,* (4. sexti.) *B P V ſimilia. ergo ut B N ad N T, ita B P ad P V: & ut quadratum B N ad N T qua-* (22.) *dratum, ita quadratum B P ad quadratum P V. ſed ut quadratum B N ad quadratum N T, ita figura, quæ fit ad diametrum V M, tranſverſum latus ad rectum, ex iis, quæ tradita ſunt in prima huius: & eadem ratione ut quadratum B P ad quadratum P V, ita figura, quæ fit ad diametrum P Q, tranſverſum latus ad rectum. ergo ut figura, ad diametrum N M, tranſverſum latus ad rectum, ita figura, ad P Q, tranſverſum latus ad rectum. ex quibus conſtat hyperbolas G N F, D P E inter ſe ſimiles eſſe, itemque alias, quæcunque circa eaſdem aſymptotos hoc pacto deſcribuntur.*

Ergo

Ergo ut rectangulum M L N ad quadratum L G, ita rectangulum M O P ad E
quadratum O R. *Sequitur enim ex iam dictis, ut rectangulum M L N ad quadratum
L G, ita eſſe rectangulum Q O P ad quadratum O R. quare & permutando ut M L N
rectangulum ad rectangulum Q O P, ita quadratum L G ad O R quadratum.*

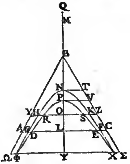
Rectangulum verò M L N maius eſt rectangulo M O P.] *Hoc eſt rectan-* F
*gulum M L N maius rectangulo Q O P. nam rectangulum M L N maius eſt rectangulo
Q L P. ergo rectangulo Q O P multò maius erit; quod punctum O ſupra L ſumatur. Il-
lud autem ita demonſtrabimus. Rectangulum enim M L N æquale eſt rectangulo M N L,* 3.ſecundi
& quadrato N L; quorum quadratum N L eſt æquale duobus quadratis N P, P L, & 4.
*ei, quod bis N P L continetur: ſimiliter rectangulum Q L P eſt æquale rectangulo Q P
L, & P L quadrato; quorum rectangulum Q P L rurſus eſt æquale tribus rectangulis,* 1.ſecundi
*rectangulo ſcilicet contento lineis M N, P L; & contento Q M, P L; & rectangulo
N P L: quæ duo poſtrema rectangula ſunt æqualia ei, quod bis N P L continetur. eſt enim
Q M ipſi N P æqualis. itaque ſublatis utrinque communibus, nempe quadrato P L, &
rectangulo, quod bis continetur N P L; relinquitur ex altera quidem parte rectangulum
M N L unà cum quadrato N P; ex altera verò rectangulum contentum M N & P L.
ſed rectangulum M N L eſt æquale duobus rectangulis, videlicet rectangulo M N P, &* 1.ſecundi
*ei, quod M N & P L continetur. rectangulum igitur M L N maius eſt, quàm Q L P,
quadrato N P, & M N P rectangulo. ut autem rectangulum M L N ad quadratum
L G, ita rectangulum Q L P ad quadratum L D: & permutando. ex quibus ſequitur
quadratum G L maius eſſe quadrato L D. ergo linea G L maior erit, quàm L D: &
tota G F maior, quàm D E; & multò maior, quàm R S. Hæc eò ſpectare videntur, ut
oſtendat ſectionem D P E intra ipſam G N F contineri: quod tamen abſque his ex alijs,
quæ in principio dicta ſunt, ſatis conſtat. ſi enim punctum P, per quod ſectio D P E tran-
ſit, infra N ſumitur; & ſectiones inter ſeſe convenire non poſſunt: ſupervacaneum quo-
dammodo fuit in his tantopere immorari. Sed vereor, ne locus corruptus ſit, ut Pappus
aliud quoddam potius, quàm hoc oſtendere voluerit. non enim ex dictis apparet lineam
R K minorem eſſe, quàm D F: quod ad propoſitum concludendum præmonſtrare oportebat.*

Atque eſt propter ſectiones rectangulum F D G æquale rectangulo K R H.) G
*Hæc nos ita reſtituimus. nam Græcus codex habet: Rectangulum F D G æquale rectan-
gulo S R H: & mendoſè, ut videtur. rectangulum enim F D G eſt æquale rectangulo K
R H, ut demonſtrabimus: & ideo maius rectangulo S R H. Producatur H K ex utra-
que parte, adeo ut ſecet aſymptoton A B in Y, & aſymptoton B C in Z. Quoniam igitur* 4. ſexti.
ut Y B ad B A, ita Y Z ad A C. atque eſt Y B minor, quàm B A. erit & Y Z, quàm 14.quinti.
*A C minor. ſed ex ijs, quæ proximè demonſtrata ſunt, A D minor eſt, quàm Y R: & F C
minor, quàm K Z. aſymptoti enim & ſectio producta ad ſeipſas propius accedunt. quare ſi
ex linea Y Z demantur Y R, K Z; & ex A C demantur A D, F C: relinquitur R K
multò minor, quàm D F. Itaque propter ſectionem D P E rectangulum Y R Z æquale eſt
rectangulo A D C. utraque enim ſunt æqualia quadrato P V, ex decima huius: & pro-
pter ſectionem G N F rectangulum Y H Z eſt æquale rectangulo A G C; quòd utraque
ſint æqualia quadrato N T. rectangulum verò Y H Z unà cum rectangulo H R K eſt æqua-
le rectangulo Y R Z, & rectangulum A G C unà cum rectangulo G D F æquale rectan-
gulo A D C; quod idem Pappus demonſtravit in lemmatibus huius libri, lemmate ter-
tio. quare ſi à rectangulo Y R Z auferatur rectangulum Y H Z; relinquitur rectangulum
H R K: & ſi à rectangulo A D C auferatur rectangulum A G C; relinquitur G D F
rectangulum: ac propterea rectangulum H R K rectangulo G D F eſt æquale. ut igitur
R K ad D F, ita eſt G D ad H R. ſed R K minor oſtenſa eſt, quàm D F. ergo G D* 14.ſexti.
quàm H R minor erit.

Quare ſemper ad minus intervallum perveniunt.] *Non ſolùm ad minus inter-* H
*vallum perveniunt, ſed ad intervallum quolibet dato intervallo minus. Producantur enim
ſectiones unà cum aſymptotis, quouſque intervallum, quod interijcitur inter aſymptotos
& ſectionem D P E, ſit dato intervallo minus; quod quidem fieri poſſe, ex decima quarta
huius*

Digitized by Google

huius apparet; erit tunc intervallum inter ſectiones interiectum multò minus intervallo dato: & quanquam hæ ſectiones in infinitum producantur; nunquam tamen inter ſe conveniunt, ut à Pappo ſuperius eſt demonſtratum: & ex proximè traditis aliter demonſtrare poſſumus in hunc modum. Si enim fieri poteſt; conveniant in Φ, X: & ducatur linea Φ X diametrum ſecans in Ψ, quæ primùm æquidiſtet lineis A C, Y Z, ut ſit ad diametrum B Ψ ordinatim applicata. Eodem modo, quo, ſupra demonſtrabimus rectangulum M Ψ N maius eſſe rectangulo Q Ψ P: & ut rectangulum M Ψ N ad quadratum Φ Ψ, ita rectangulum Q Ψ P ad idem Φ Ψ quadratum: & permutando rectangulum M Ψ N ad rectangulum Q Ψ P, ut quadratum Φ Ψ ad ſemetipſum. ergo rectangulum M Ψ N æquale eſt rectangulo Q Ψ P. ſed & maius; quod eſt abſurdum.



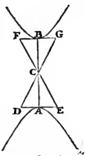
Aliter. Si ſectiones conveniant in Φ, X; producatur li-
10. huius. *nea Φ X uſque ad aſymptotos in pũcta Ω, Σ: erit rectangulum Ω Φ Σ propter ſectionem G N F æquale quadrato N T. & propter ſectionem D P E æquale quadrato P V. quare quadratũ N T quadrato P V æquale erit. Itaque quoniã ut quadratum N T ad quadratum P V, ita quadratum N B ad quadratum B P: erit & quadratum N B æquale quadrato B P; & ideo linea N B lineæ B P æqualis; quod itidem eſt abſurdum. non igitur hæ ſectiones inter ſe conveniunt. Quòd ſi linea Φ X non æquidiſtet lineis A C, Y Z; dividatur bifariam in puncto Ψ, & iuncta Ψ B producatur ad M Q: ſecet autem hyperbolas D P E, G N F in punctis P, N, & ab ipſis ducantur P V, N T ſectiones contingentes, quæ lineis A C, Y Z æquidiſtabunt, ex quinta huius: fiatque B M æqualis B N, & B Q æqualis B P. erit N M ſectionis G N F, & P Q ſectionis D P E diameter tranſverſa. quare ſimiliter, ut ſupra, demonſtrabimus nullo modo fieri poſſe, ut hæ ſectiones inter ſe conveniant.*

K Sed & illud facilè conſtare poteſt. ſi enim utraque ipſarum ad aſymptotos propiùs accedit; & ad ſeſe propiùs accedant neceſſe eſt.] *Vide, quomodo hæc ratio neceſſitatem habeat. poſſet enim quis dicere utranque ſectionem accedere quidem propiùs ad aſymptotos: ſed tamen pari intervallo; ita ut ſemper inter ſeſe æquidiſtent.*

THEOREMA XIV. PROPOSITIO XV.

OPPOSITARUM ſectionum aſymptoti communes ſunt.

SINT oppoſitæ ſectiones, quarum diameter A B, & centrum C. Dico ſectionum
A, B aſymptotos communes eſſe. Ducantur enim per puncta
A A, B lineæ D A E, F B G, quæ ſectiones contingant. æquidi-
ſtantes igitur ſunt D A E, F B G. abſcindantur lineæ D A,
A E, F B, B G; ita ut cuiuſque earum quadratum æquale ſit
quartæ parti figuræ, quæ ad diametrum A B conſtituitur. er-
B go D A, A E, F B, B G inter ſe ſunt æquales. iungantur CD,
C C E, C F, C G. perſpicuum igitur eſt D C, C G in eadem re-
cta linea contineri; itemque E C, C F: propterea quòd æqui-
diſtantes ſunt D A E, F B G. Itaque quoniam hyperbole eſt,
cuius diameter A B; contingens autem D E; & unaquæ-
que linearum D A, A E poteſt quartam partem figuræ,
D quæ ad A B conſtituitur: erunt D C, C E aſymptoti. &
eadem ratione ipſius B ſectionis aſymptoti erunt F C,
C G. oppoſitarum igitur ſectionum aſymptoti communes ſunt.



FED.

FED. COMMANDINVS.

ÆQVIDISTANTES igitur ſunt D A E, F B G.) *Vtraque enim æquidiſtat lineis, quæ ad diametrum A B ordinatim applicantur.* A

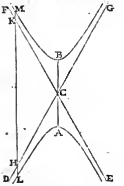
Ergo D A, A E, F B, B G inter ſe ſunt æquales.) *Ex decima quarta primi huius. nam tranſverſum latus A B eſt utrique commune, & recta figuræ latera inter ſe æqualia.* B

Perſpicuum igitur eſt D C, C G in eadem recta linea contineri: itemque E C, C
C F; propterea quòd æquidiſtantes ſunt D A E, F B G.] *Quoniam enim D A E,*
F B G inter ſe æquidiſtant; erit angulus D A C angulo G B C æqualis. linea verò A C 29. primi.
eſt æqualis C B, & D A ipſi G B quare & baſis D C baſi C G, & reliqui anguli reliquis 4.
æquales erunt. angulus igitur A C D eſt æqualis angulo B C G. ſed duo anguli D C A, 13.
D C B ſunt æquales duobus rectis; itemque G C B, G C A. quare reliquus ex duobus rectis angulus D C B eſt æqualis reliquo A C G. duo igitur anguli D C A, A C G
duobus rectis æquales erunt: & iccirco D C, C G in eadem recta linea continentur. Eodem 14. primi.
quoque modo E C, C F in eadem recta linea contineri demonſtrabimus.

Erunt D C, C E aſymptoti.] *Ex prima huius.* D

THEOREMA XV. PROPOSITIO XVI.

SI in oppoſitis ſectionibus quædam recta linea ducatur, ſecans utranque linearum continentium angulum, qui deinceps eſt angulo ſectiones continenti: cum utraque oppoſitarum in uno tantùm puncto conveniet; & lineæ, quæ ex ipſa abſciſſæ inter aſymptotos & ſectiones interijciuntur, æquales erunt.



SINT oppoſitæ ſectiones A,B; quarum quidem centrum C, aſymptoti verò D C G, E C F: & ducatur quædam recta linea H K, quæ utranque D C, C F ſecet. Dico H K productam cum utraque ſectione in uno tantùm puncto convenire. Quoniam enim ſectionis A aſymptoti ſunt D C, C E; & ducta eſt quædam recta linea H K, ſecans utranque continentium angulum, qui deinceps eſt angulo ſectionem continenti, videlicet D C F: A
producta H K cum ſectione A conveniet, & ſimiliter cum ſectione B. conveniat in punctis L, M: & per C ipſi L M æquidiſtans ducatur A C B. æquale igitur eſt rectangulum K L H quadrato A C. B
& rectangulum H M K quadrato C B. quare & K L H rectangulum æquale C
eſt rectangulo H M K: & iccirco linea H L lineæ D
K M eſt æqualis.

FED. COMMANDINVS.

PRODVCTA H K cum ſectione A conveniet, & ſimiliter cum ſectione B.) *Ex undecima huius.* A

Æquale igitur eſt rectangulum K L H quadrato A C. & rectangulum H M K B
quadrato C B.) *Ex eadem.*

Quare & K L H rectangulum eſt æquale rectangulo H M K.] *Quoniam enim linea A C lineæ C B eſt æqualis; quòd C ſit ſectionis centrum: erit & quadratum A C quadrato C B æquale.* C

Et

D Et iccirco linea H L lineæ K M eſt æqualis.] *Illud nos hoc lemmate demonſtrabimus.*

SIT recta linea A B, in qua ſumantur duo puncta C, D: ſitque rectangulum D A C æquale rectangulo C B D. Dico lineam AC ipſi BD æqualem eſſe.

SI enim fieri poteſt; ſit A C maior, quàm B D: & addita utrique communi C D, erit A D maior, quàm C B: & propterea rectangulum D A C maius rectangulo C B D. ſed & æquale; quod eſt abſurdum. linea igitur A C ipſi B D eſt æqualis.

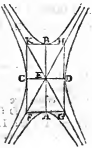


ALITER. Poſſumus etiam recta demonſtratione uti hoc modo.

14. ſexti. *Quoniam enim rectangulum D A C rectangulo C B D eſt æquale: erit ut A D ad*
9. quinti. *D B, ita B C ad C A: & componendo ut A B ad B D, ita B A ad A C. ergo linea A C ipſi B D æqualis erit.*

THEOREMA XVI. PROPOSITIO XVII.

OPPOSITARUM ſectionum, quæ coniugatæ appellantur, aſymptoti communes ſunt.



SINT oppoſitæ ſectiones, quæ coniugatæ appellantur; quarum diametri coniugatæ A B, C D; & centrum E. Dico earum aſymptotos communes eſſe. Ducantur enim lineæ, ſectiones in punctis A, B, C, D contingentes, quæ ſint F A G, G D H, H B K,
A K C F. ergo parallelogrammum eſt F G H K. Itaque ſi iun-
B gantur F E H, K E G; erunt F E H, K E G rectæ li-
C neæ, & diametri ipſius parallelogrammi, quæ à puncto
D E biſariam ſecabuntur. & quoniam figura, quæ ad dia-
E metrum A B conſtituitur, æqualis eſt quadrato C D. &
F eſt C E æqualis E D. unũquodque quadratorum F A, A G, K B, B H erit quarta pars figuræ, quæ conſti-
G tuitur ad A B. ergo F E H, K E G ſectionum A, B aſymptoti ſunt. ſimiliter demonſtrabimus ſectionum C, D eaſdem eſſe aſymptotos. oppoſitarum igitur ſectionum, quas coniugatas dicimus, aſymptoti communes ſunt.

FED. COMMANDINVS.

A ERGO parallelogrammum eſt F G H K.) *Æquidiſtant enim F G, K H lineis, quæ ad A B diametrum ordinatim applicantur. quare & inter ſeſe. & eadem ratione K F, H G inter ſe æquidiſtant.*

B Erunt F E H, K E G rectæ lineæ, & diametri ipſius parallelogrammi.) *Hoc demonſtravimus in quintam decimam huius, videlicet F E H in eadem recta linea contineri, & ſimiliter K E G.*

C Quæ à puncto E biſariam ſecabuntur.] *Hoc etiam eodem in loco demonſtravimus.*

D Et quoniam figura, quæ ad diametrum A B conſtituitur, æqualis eſt quadrato C D.) *Quoniam enim linea C D ſectionum A, B ſecunda diameter eſt, coniugata ipſi A B, mediam proportionem habet inter figurarum latera, ex diffinitione ſecundæ dia-*
17. sexti. *metri. quare ut A B ad C D, ita C D ad rectum figuræ latus: & iccirco rectangulum, quod fit ex A B & latere recto, quadrato C D eſt æquale.*

E Et eſt C E æqualis E D.) *Aliter enim non eſſet ſecunda diameter.*

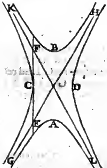
Vnũ-

Vnũquodque quadratorum F A, A G, K B, B H erit quarta pars eius F
figuræ.] *Nam cùm C D æquidiſtet F G, K H; & A B ipſis F K, G H: erunt lineæ* 34. primi
F A, K B æquales C E; & A G, B H ipſi E D. quare uniuſcuiuſque quadratum quar- 20. ſexti.
ta pars eſt quadrati C D, hoc eſt figuræ eius, quæ ad A B conſtituitur.

Ergo F E H, K E G ſectionum A, B aſymptoti ſunt.) *Ex prima huius.* G

THEOREMA XVII. PROPOSITIO XVIII.

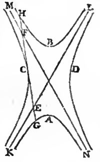
SI uni oppoſitarum ſectionum, quæ coniugatæ dicuntur, occurrat recta linea; & producta ad utraſque partes extra ſectionem cadat: cum utraque ſectionum, quæ deinceps ſunt, in uno tantùm puncto conveniet.



SINT oppoſitæ ſectiones, quæ coniugatæ dicuntur, A B, C D: & ipſi C occurrat recta linea E F, quæ producta ad utraſque partes extra ſectionem cadat. Dico E F cum utraque ſectione A, B convenire in uno tantùm puncto. Sint enim G H, K L ſectionum aſymptoti. Ergo E F ſecabit utranque G H, K L: & propterea cum ſectionibus A, B in uno tantùm puncto conveniet. 1. huius. 16. huius.

THEOREMA XVIII. PROPOSITIO XIX.

SI in oppoſitis ſectionibus, quæ coniugatæ appellantur, ducatur recta linea, quamvis ipſarum contingens: cum ſectionibus, quæ deinceps ſunt, conveniet; & ad tactum bifariam ſecabitur.



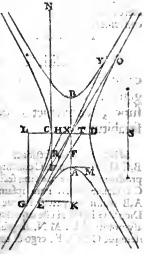
SINT oppoſitæ ſectiones, quæ coniugatæ dicuntur A B, C D: & ſectionem C contingat recta linea E F. Dico E F productam convenire cum ſectionibus A, B: & ad punctum C bifariam ſecari. nam ipſam quidem convenire cum ipſis A, B manifeſtè patet. Itaque conveniat in punctis G, H. Dico C G ipſi C H eſſe æqualem. Ducantur enim ſectionum aſymptoti K L, M N. Æquales igitur ſunt E G, F H; itemque C E, C F. ergo & tota C G toti C H æqualis erit. ex antecedente. 16. huius. 1. huius.

THEOREMA XIX. PROPOSITIO XX.

SI unam oppoſitarum ſectionum, quæ coniugatæ appellantur, recta linea contingat; & per ipſarum centrum ducantur duæ lineæ, una quidem per tactum, altera verò contingenti æquidiſtans, quouſque occurrat uni earum ſectionum, quæ deinceps ſunt: recta linea, quæ in occurſu ſectionem contingit, æquidi-

ſtans erit lineæ per tactum & centrum ductæ ; quæ verò per tactus & centrum ducentur , oppoſitarum ſectionum coniugatæ diametri erunt .

SINT oppoſitæ ſectiones , quæ coniugatæ appellantur ; quarum diametri coniugatæ ſint A B , C D ; centrum X : & ſectionem A contingat recta linea E F , quæ
A producta conueniat cum C X in T ; & iuncta E X ad Y producatur : deinde per X ducatur ipſi E F æquidiſtans X G ; & per G contingens ſectionem H G . Dico H G ipſi X E æquidiſtare : & G O , E Y coniugatas diametros eſſe . Applicentur enim ordinatim E K , G L , C R P : lineæ verò , iuxta quas poſſunt applicatæ , ſint A M ,
B C C N . Quoniam igitur ut B A ad A M , ita eſt N C ad C D : & ut B A ad A M , ita rectangulum X K F ad quadratum K E ; ut verò N C ad C D , ita quadratum G L
23. ſexti. ad rectangulum X L H . ſed rectangulum X K F ad K E quadratum proportionem compoſitam habet ex proportione X K ad K E , & ex proportione F K ad K E : & quadratum G L ad rectangulum X L H proportionem habet compoſitam ex proportione G L ad L X & proportione G L ad L H . proportio igitur compoſita ex proportione X K ad K E , & proportione F K ad K E eadem eſt , quæ componitur ex
D proportione G L ad L X , & proportione G L ad L H . quarum quidem proportio F K ad K E eadem eſt , quæ G L ad L X ; lineæ enim E K , K F , F E æquidiſtant ipſis X L , L G , G X . reliqua igitur proportio X K ad K E eadem erit , quæ G L ad L H . quòd cùm circa æquales angulos , qui ad
6. ſexti. K , L , latera proportionalia ſint ; triangulum E K X ſimile erit triangulo G H L ; & æquales habebit angulos , ſub quibus eiuſdem rationis latera ſubtenduntur . ergo æqualis eſt angulus E X K angulo L G H .
29. primi eſt autem & totus K X G æqualis toti L G X , quare
E reliquus E X G reliquo H G X eſt æqualis : ac propterea linea E X ipſi G H æquidiſtat . itaque fiat , ut
F P G ad G R , ita H G ad lineam , in qua S , erit linea S dimidia eius , iuxta quam poſſunt , quæ ad diametrum O G applicantur in ſectionibus C , D . ſed A , B ſectionum ſecunda diameter eſt C D , cum qua con-
G uenit ipſa E T . rectangulum igitur ex T X & K E æquale eſt quadrato C X . ſi enim a puncto E ipſi K X æquidiſtantem duxerimus ; rectangulum , quod fit ex T X & linea , quæ inter X & æquidiſtantem in-
H terijcitur , quadrato C X æquale erit . quare ut T X
K ad K E , ita T X quadratum ad quadratum X C . ut
L autem T X ad K E , ita T F ad F E , hoc eſt triangu-
M lum T X F ad triangulum E X F : & ut quadratum T X ad quadratum X C , ita triangulum T X F ad
N triangulum X C P , hoc eſt ad triangulum G H X .



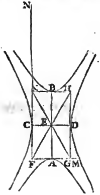
ut igitur triangulum T X F ad triangulum E X F , ita T X F triangulum ad tri-
9. quinti. angulum G H X : & ideo triangulum G H X æquale eſt triangulo X E F .
O habet autem & angulū H G X angulo X E F æqualem ; quoniam E X quidem æqui-
15. ſexti. 16. diſtat G H , & E F ipſi G X . ergo latera , quæ ſunt circa æquales angulos , ex cōtraria parte ſibi ipſis reſpondent ; eſtque ut G H ad E X , ita E F ad G X . rectangulum igitur H G X æquale eſt rectangulo K E F . itaque quoniam ut linea S ad H G , ita
P R G ad G P . & ut R G ad G P , ita X E ad E F ; æquidiſtant enim . quare ut S ad H G , ita X E ad E F . ut autem S ad H G , ſumpta X G communi altitudine , ita
lem. in 22. decimi. eſt rectangulum ex S & X G ad rectangulum H G X : & ut X E ad E F , ita quadratum

tum X E ad rectangulum X E F. ut igitur rectangulum ex S & X G ad rectangulum H G X, ita X E quadratum ad rectangulum X E F: & permutando ut rectangulum ex S & G X ad quadratum X E, ita rectangulum H G X ad rectangulum X E F. ſed æquale eſt rectangulum H G X rectangulo X E F. ergo rectangulum ex S & G X æquale eſt quadrato X E. & rectangulum ex S & G X quarta pars eſt figuræ, quæ ad G O conſtituitur. nam & G X eſt dimidia ipſius G O, & S dimidia eius, iuxta quam poſſunt: quadratum verò E X quarta pars eſt quadrati E Y; quòd E X æqualis ſit X Y. ergo quadratum E Y æquale eſt figuræ ad G O conſtitutæ. ſimiliter demonſtrabimus & quadratum G O figuræ, quæ fit ad E Y, eſſe æquale. ex quibus ſequitur, ut E Y, G O oppoſitarum ſectionum A B, C D diametri coniugatæ ſint.

FED. COMMANDINVS.

DEINDE per X ducatur ipſi E F æquidiſtans X G.) *Intelligendum G X productam ſectioni occurrere in O puncto. Apollonius punctum, in quo recta linea ſectioni, vel alteri lineæ occurrit, σύμπτωσιν vocat: nobis occurſum Latinè liceat appellare.* A

Quoniam igitur, ut B A ad A M, ita eſt N C ad C D.] *Hoc ita demonſtrabimus.* B
Sint oppoſitæ ſectiones, quæ coniugatæ appellantur, quarum diametri coniugatæ A B, C D; centrum E; & aſymptoti F H, G K: iunganturque F A G, G D H, H B K, K C F: ſit autem ſectionis A rectum latus A M, & ſectionis C rectum latus C N. Dico ut B A ad A M, ita eſſe N C ad C D. Quoniam enim ut B A ad A M, ita eſt quadratum E A ad quadratum A F; quod in prima propoſitione oſtenſum fuit: & eadem ratione, ut N C ad C D, ita quadratum F C ad quadratum C E. ſed ut quadratum E A ad quadratum A F, ita eſt F C quadratum ad quadratum C E; quòd E A, F C æquales ſint; itemque æquales A F, C E. ergo ut B A ad A M, ita N C ad C D. 22. ſexti. 34. primi.



Et ut B A ad A M, ita rectangulum X K F ad quadratum K E.] *Ex trigeſima ſeptima primi huius.* C

Quarum quidem proportio F K ad K E eadem eſt, quæ G L ad L X. lineæ enim E K, K F, F E ipſis X L, L G, G X æquidiſtant.) *Cùm enim G X æquidiſtet E F, & L G ipſi K F; erit angulus E F K æqualis angulo G X K, hoc eſt angulo X G L. angulus autem E K F æqualis eſt ipſi X L G; quòd & E K æquidiſtet L X. reliquus igitur angulus reliquo eſt æqualis. & triangulum F K E triangulo G L X ſimile. quare ut F K ad K E, ita G L ad L X.* D 29. primi 34.

Ac propterea linea E X ipſi G H eſt æquidiſtans.] *Ex vigeſima octaua primi: ſed hoc etiam ex ſecundo lemmate Pappi conſtare poteſt.* E

Erit linea S dimidia eius, iuxta quam poſſunt, quæ ad diametrum O G applicantur.] *Ex quinquageſima prima primi huius.* F

Rectangulum igitur ex T X & K E æquale eſt quadrato C X. ſi enim à puncto E ipſi K X æquidiſtantem duxerimus; rectangulum, quod fit ex T X & ea, quæ, &c.) *Ex trigeſima octaua primi huius.* G

Quare ut T X ad K E, ita T X quadratum ad quadratum X C.) *Quoniam enim rectangulum ex T X & K E æquale eſt quadrato X C; erunt tres lineæ T X, X C, K E proportionales. ergo ut T X ad K E, ita quadratum T X ad X C quadratum, ex corollario vigeſimæ ſexti.* H

Vt autem T X ad K E, ita T F ad F E.) *Ex quarta ſexti, propter ſimilitudinem triangulorum T F X, E F K.* K

Hoc eſt triangulum T X F ad triangulum E X F.] *Ex prima ſexti.* L

M Et ut quadratum T X ad quadratum X C, ita triangulum T X F ad triangulum
cor.20.sexti. X C P.) *Rurſus cùm tres lineæ proportionales ſint T X, X C, K E; erit triangulum T X F ad triangulum X C P, ut T X ad K E. ſunt enim ea triangula inter ſe ſimilia; quòd P X æquidiſtet F T. ut autem T X ad ad KE, ita T X quadratum ad quadratum XC. triangulum igitur T X F ad triangulum XCP eſt, ut quadratum T X ad X C quadratum.*

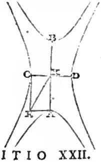
N Hoc eſt ad triangulum G H X.] *Eſt enim triangulum G H T triangulo X C P æquale; quod probatum eſt in ſecunda demonſtratione quadrageſima tertia primi huius.*

O Habet autem & angulum H G X angulo X E F æqualem. quoniam E X quidem
29. primi. æquidiſtat G H, & E F ipſi G X.) *Angulus enim H G X eſt æqualis angulo G X E, hoc eſt ipſi X E F.*

P Et ut R G ad G P, ita X E ad E F. æquidiſtant enim.] *Ex quarta ſexti, nam triangula R G P, X E F ſimilia ſunt; quòd etiam X F ipſi R P æquidiſtet.*

THEOREMA XX. PROPOSITIO XXI.

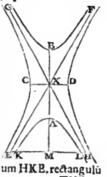
IISDEM poſitis, oſtendendum eſt punctum, in quo contingentes lineæ conveniunt, ad unam aſymptoton eſſe.



SINT oppoſitæ ſectiones, quæ coniugatæ appellantur; & earum diametri A B, C D: ducanturque contingentes A E, E C. Dico punctum E ad aſymptoton eſſe. Eſt enim quadratum C X æquale quartæ parti figuræ, quæ ad A B conſtituitur. quadrato autem C X æquale eſt quadratum A E. ergo quadratum A E quartæ parti dictæ figuræ erit æquale. itaque iungatur E X. aſymptotos igitur eſt E X: & propterea punctum E ad ipſam aſymptoton neceſſariò conſiſtit.

THEOREMA XXI. PROPOSITIO XXII.

SI in oppoſitis ſectionibus, quæ coniugatæ appellantur, ex centro ad quamvis ſectionem ducatur recta linea; & huic æquidiſtans altera ducatur, quæ cum una ex ſectionibus, quæ deinceps ſunt, & cum aſymptotis conveniat: rectangulum, conſtans ex portionibus lineæ ductæ, inter ſectionem & aſymptotos interiectis, quadrato lineæ, quæ ex centro ducitur, æquale erit.

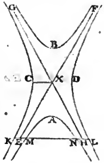


SINT oppoſitæ ſectiones, quæ coniugatæ appellantur A, B, C, D; quarum aſymptoti E X F, G X H: & ex centro X ducatur quædam recta linea X C D: & huic æquidiſtans ducatur E K L H, quæ & ſectionem, quæ deinceps eſt, & aſymptotos ſecet. Dico rectangulum E K H quadrato C X æquale eſſe. Secetur enim KL bifariam in M; & iuncta MX producatur. dia-
5. huius. meter igitur eſt AB ipſarum A, B ſectionum. Et quoniam lineâ quæ in puncto A ſectionem contingit, æquidiſtans eſt ipſi EH: erit EH ad diametrum AB ordinatim applicata. centrum au-
20. huius. tem eſt X. ergo AB, CD coniugatæ ſunt diametri: propterea-que quadratum C X æquale eſt quartæ parti figuræ, quæ ad
10. huius. AB conſtituitur. ſed quartæ parti figuræ æquale eſt rectangulum HKE. rectangulũ igitur HKE quadrato CX æquale erit.

THE-

THEOREMA XXII. PROPOSITIO XXIII.

SI in oppoſitis ſectionibus, quæ coniugatæ appellantur, ex centro ducatur quædam recta linea ad quamvis ſectionem; & huic æquidiſtans ducatur, quæ cum tribus, quæ deinceps ſunt, ſectionibus conveniat: rectangulum, conſtans ex portionibus lineæ ductæ, inter tres ſectiones interiectis, duplum erit quadrati eius lineæ, quæ ex centro ducitur.

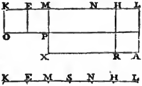


SINT oppoſitæ ſectiones, quæ coniugatæ appellantur, A, B, C, D; quarum centrum ſit X: & à puncto X ad quamvis ſectionem ducatur quædam recta linea X C; atque huic æquidiſtans ſit K L, quæ cum tribus deinceps ſectionibus conveniat. Dico rectangulum K M L quadrati C X duplum eſſe. Ducantur enim aſymptoti ſectionum E F, G H. Ergo quadratum C X æquale A
eſt utrique rectangulorum H M E, H K E. rectangu- B
lum autem H M E unà cum rectangulo H K E æquale eſt rectangulo L M K; propterea quòd extremæ lineæ ſunt æquales, rectangulum igitur L M K quadrati C X duplum erit.

EVTOCIVS.

Rectangulum autem H M E unà cum rectangulo H K E æquale eſt rectangulo B
L M K; propterea quòd extremæ lineæ ſunt æquales.) *Sit, recta linea L K; & ſit L H æqualis E K; & H N ipſi E M: ducantur autem à punctis M, K perpendiculares lineæ M X, K O; ita ut M X ſit æqualis M K, & K O æqualis K E: & compleantur parallelogramma X H, H A. Itaque quoniam M X æqualis eſt M K, hoc eſt P O. & L H æqualis K E, hoc eſt K O. erit H A parallelogrammum parallelogrammo M O æquale. commune apponatur X H. totum igitur parallelogrammum L X æquale eſt duobus parallelogrammis X H, M O, hoc eſt H O, P R. eſt autem parallelogrammum L X, quod continetur L M K: & parallelogrammum H O continetur H K E; & parallelogrammum P R, H M E. ſed licet & aliter idem demonſtrare.*

Secetur M N bifariam in S. conſtat igitur & L K in S bifariam ſecari, & rectangulum H K E æquale eſſe rectangulo L E K; quòd H K ſit æqualis L E. Et quoniam L K* 5. ſecundi
ſecatur in partes æquales in S, & in partes inæquales in E; erit rectangulum L E K unà cum quadrato E S æquale quadrato S K. quadratum autem E S rectangulo H M E unà cum quadrato S M eſt æquale. ergo quadratum S K æquale eſt rectangulo L E K, hoc eſt H K E, & rectangulo H M E unà cum quadrato S M. eadem ratione erit quadratum S K æquale rectangulo L M K, & quadrato S M. quare rectangulum H K E unà cum rectangulo H M E, & quadrato S M æquale eſt rectangulo L M K, & quadrato S M. commune auferatur quadratum S M, reliquum igitur rectangulum H K E unà cum rectangulo H M E eſt æquale rectangulo L M K.



FED. COMMANDINVS.

ERGO quadratum C X æquale eſt utrique rectangulorum H M E, H K E.) *Eſt* A
enim

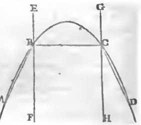
enim ex antecedenti propoſitione rectangulum H M E æquale quadrato C X : & ex undecima huius rectangulum H K E eidem quadrato C X eſt æquale.

B Rectangulum autem H M E unà cum rectangulo H K E æquale eſt rectangulo L M K; propterea quòd extremæ lineæ ſunt æquales.] *Hoc apparet ex tertio, & quarto lemmate Pappi; quanquam in tertio aliter concludat. oſtendit enim rectangulum L E K unà cum rectangulo H M E æquale eſſe rectangulo L M K. ſed cùm L H, K E ſint æquales; rectangulum H K E æquale eſt ipſi L E K. quare ſequitur rectangulum H K E unà cum rectangulo H M E æquale eſſe rectangulo L M K. Eutocius ſecundam demonſtrationem ex Pappo ſumpſit: nos verò priuſquam in lemmata Pappi, vel Eutocij commentarios incideremus, illud ex prima ſecundi libri elementorum in hunc modum demonſtravimus.*

Iiſdem quæ ſupra manentibus, dico rectangulum H M E unà cum rectangulo H K E
1. ſecundi *æquale eſſe rectangulo L M K. Eſt enim rectangulum H K E æquale rectangulo M K E unà cum eo, quod fit ex H M & K E. commune apponatur rectangulum H M E. ergo rectangula H M E, H K E æqualia ſunt rectangulis H M E, M K E unà cum eo, quod fit ex H M & K E. rurſus rectangulum L M K æquale eſt rectangulo H M K unà cum eo, quod ex L H & M K conſtat, hoc eſt rectangulo E K M: eſt enim E K æqualis L H. quorum quidem rectangulum H M K eſt æquale rectangulo H M E unà cum eo, quod fit ex H M & K E. ergo rectangulum L M K æquale eſt rectangulis H M E, E K M unà cum eo, quòd fit ex H M, K E. quibus quidem æqualia erant rectangula H M E, H K E. rectangulum igitur H M E unà cum rectangulo H K E æquale eſt rectangulo L M K.*

THEOREMA XXIII. PROPOSITIO XXIV.

SI parabolæ duæ rectæ lineæ occurrant, utraque in duobus punctis; & nullius ipſarum occurſus alterius occurſibus contineatur: convenient inter ſeſe extra ſectionem.



SIT parabole A B C D, cui duæ rectæ lineæ A B, C D occurrant; ita ut nullius ipſarum occurſus alterius occurſibus contineatur. Dico eas productas inter ſe convenire. Ducantur enim per B, C diametri
cor. 51. 1. huius ſectionis E B F, G C H. æquidiſtantes igitur ſunt:
26. 1. huius. & utraque ſectionem in uno tantùm puncto ſecat. Itaque iuncta B C anguli E B C, G C B duobus rectis ſunt æquales: & iccirco lineæ B A, D C angulos duobus rectis minores efficiunt. ergo inter ſeſe extra ſectionem convenient.

E V T O C I V S.

ANIMADVERTENDVM eſt Apollonium συμπτώσεις, hoc eſt occurſus, appellare puncta, in quibus lineæ A B, C D ſectioni occurrunt: & obſervare oportet, ut puncta extra ſeſe poſita ſint. Eadem etiam eveniunt in ipſis contingentibus.

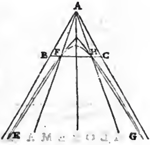
THEOREMA XXIV. PROPOSITIO XXV.

SI hyperbolæ occurrant duæ rectæ lineæ, utraque in duobus punctis; nullius autem ipſarum occurſus alterius occurſibus

con-

continteatur: convenient quidem inter ſeſe extra ſectionem; ſed tamen intra angulum, qui hyperbolen continet.

SIT hyperbole, cuius aſymptoti A B, A C: & duæ rectæ lineæ E F, G H ſectioni occurrant. Dico E F, G H productas extra ſectionem quidem; ſed tamen intra angulum B A C inter ſe convenire. Iunctæ enim A F, A H producantur; & iungatur F H. Itaque quoniam E F, G H productæ ſecant angulos A F H, A H F. & ſunt dicti anguli duobus rectis minores. convenient inter ſeſe extra ſectionem quidem; ſed tamen intra angulum B A C. ſimiliter demonſtrabimus E F, G H inter ſe convenire; etiamſi ſectionem contingant.



FED. COMMANDINVS.

SIMILITER demonſtrabimus E F, G H inter ſe convenire; etiamſi ſectionem contingant.] *Convenire ſcilicet intra angulum aſymptotis contentum; quod quidem etiam patere poteſt ex corollario trigeſima prima primi huius. linea enim, quæ hyperbolen contingit, ſi producatur, ſecat diametrum inter verticem & centrum ſectionis. Idem quoque evenire perſpicuum eſt: ſi altera quidem linea ſectionem contingat; altera verò in duobus punctis ſecet.*

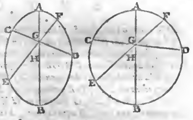
THEOREMA XXV. PROPOSITIO XXVI.

SI in ellipſi, vel circuli circunferentia duæ rectæ lineæ non tranſeuntes per centrum ſe invicem ſecent: bifariam ſeſe non ſecabunt.

SI enim fieri poteſt; in ellipſi, vel circuli circunferentia duæ rectæ lineæ C D, E F non tranſeuntes per centrum ſeſe bifariam ſecent in G: ſitque H centrum ſectionis; & iuncta G H ad A, B puncta producatur. Quoniam igitur A B diameter eſt, ipſam E F bifariam ſecans; linea, quæ ad A ſectionem contingit, æquidiſtans erit E F. ſimiliter demonſtrabimus eandem etiam ipſi C D æquidiſtare. ergo E F æquidiſtat C D; quod eſt abſurdum. non igitur E F, C D ſeſe bifariam ſecant.

9. huius.

10. primi.

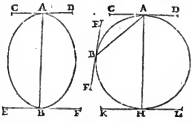


THEOREMA XXVI. PROPOSITIO XXVII.

SI ellipſim, vel circuli circunferentiam duæ rectæ lineæ contingant: & ſi quidem ea, quæ tactus coniungit, per centrum tranſeat ſectionis; contingentes lineæ ſibi ipſis æquidiſtabunt: ſin minus; convenient inter ſeſe ad eaſdem centri partes.

SIT

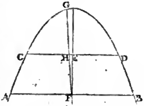
SIT ellipſis, vel circuli circunferentia A B, quam contingant duæ rectæ lineæ C A D, E B F; iungaturque A B: & primò tranſeat per centrum. Dico C D ipſi E F æquidiſtantem eſſe. Quoniam enim A B diameter eſt ſectionis. & C D in puncto A ipſam contingit. erit C D æquidiſtans lineis, quæ ad diametrum A B ordinatim applicantur. & ſimili ratione E F erit eiſdem æquidiſtans. ergo C D æquidiſtat E F. Si verò A B per centrum non tranſeat, ut apparet in ſecunda figura; ducatur A H diameter, & per H contingens K H L. æquidiſtat igitur K L ipſi C D. quare E F producta ad eaſdem partes centri, in quibus eſt A B, cum C D conveniet.



THEOREMA XXVII. PROPOSITIO XXVIII.

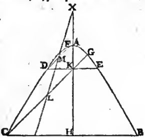
SI in coni ſectione, vel circuli circunferentia duas lineas æquidiſtantes recta linea bifariam ſecet; diameter erit ſectionis.

IN ſectione enim coni duæ lineæ æquidiſtantes A B, C D in punctis E, F bifariam ſecentur: & iuncta E F producatur. Dico E F ſectionis diametrum eſſe. Si enim non eſt; ſit G H F diameter, ſi fieri poſ-
5. & 6. huius. ſit. Ergo quæ in puncto G contingit ſectionem, æquidiſtans eſt ipſi A B. quare & ipſi C D. eſt autem G H diameter. ergo C H, H D æquales ſunt; quod eſt abſurdum. poſuimus enim C E æqualem E D. non igitur G H diameter eſt ſectionis. ſimiliter demonſtrabimus neque aliam quampiam eſſe diametrum, præter quã ipſam E F. ergo F E ſectionis diameter erit.

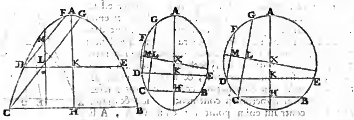


E V T O C I V S.

NON inutile erit, data in plano curva linea, inveſtigare: utrum circuli circunferentia ſit, vel alia ex coni ſectionibus; an verò ab his ipſis diverſa. Itaque ſit A B C; & oporteat ſpeciem ipſius inveſtigare. Sumantur in linea aliqua puncta C, D; per quæ ducantur intra ipſam lineæ æquidiſtantes C B, D E: & rurſus ab iiſdem punctis aliæ æquidiſtantes ducantur C G, D F: bifariamque ſecentur C B, D E quidem in H, K punctis; C G, D F verò in L, M; & iungantur H K, L M. Si igitur omnes, quæ ipſi C B æquidiſtant, à linea H K; & quæ æquidiſtant C G ab ipſa M L bifariam dividantur: erit A B C una ex coni ſectionibus; cuius diametri H K, M L: ſin minus; non erit. Sed quæ ſit ex quatuor comperiemus, lineas H K, L M in infinitum producentes utraque ex parte: vel enim æquidiſtant; & eſt parabole: vel ad partes quidem H L inter ſe conveniunt; & eſt ellipſis, aut circulus: vel ad alteras partes; & eſt hyperbole: ellipſim verò à circulo diſtinguemus ex puncto, in quo conveniunt H K, M L, quod eſt centrum. ſi enim ab eo ad lineam ductæ ſunt æquales; conſtat A B C cir-



circuli circumferentiam eſſe: ſin minus; ellipſim. Poſſumus autem & aliter ipſas cognoſcere ex ijs, quæ ad diametrum ordinatim applicantur, videlicet C H, D K. nam ſi fuerit, ut quadratum C H ad quadratum D K, ita H A ad A K; parabole erit: at ſi

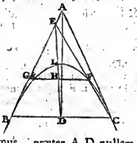


C H quadratum ad quadratum D K maiorem quidem habuerit proportionem, quàm H A ad A K; hyperbole: ſi verò minorem; ellipſis. Sed etiam ex lineis contingentibus eaſdem diſcernere licebit; ſi ea, quæ ſuperius dicta ſunt, ipſis ineſſe in memoriam redigemus.

THEOREMA XXVIII. PROPOSITIO XXIX.

SI coni ſectionem, vel circuli circunferentiam duæ rectæ lineæ contingentes in idem punctum conveniant; & ab eo ad punctum, quod lineam tactus coniungentem bifariam ſecat, alia linea ducatur; ſectionis diameter erit.

SIT coni ſectio, vel circuli circunferentia, quam contingant rectæ lineæ A B, A C, in punctum A convenientes: & ducta B C ſecetur bifariam in D; & iungatur A D. Dico A D diametrum eſſe ſectionis. Si enim fieri poteſt; ſit D E diameter: & iungatur C E, quæ ſectionem ipſam ſecabit. ſecet autem in F; & per F ipſi C D B ducatur æquidiſtans F H G. Itaque quoniam C D æqualis eſt D B; erit & F H ipſi H G æqualis. ſed linea, quæ in L contingit ſectionem, æquidiſtans eſt B C: & eſt F G eidem æquidiſtans. ergo F G æquidiſtat lineæ ſectionem in puncto L contingenti: & iccirco F H eſt æqualis H K; quod fieri minimè poteſt. non igitur diameter eſt D E. ſimiliter demonſtrabimus, præter A D nullam aliam eſſe diametrum.



ex demonſtratis in 6. primi huius. 5. huius

THEOREMA XXIX. PROPOSITIO XXX.

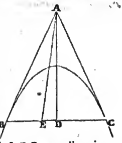
SI coni ſectionem, vel circuli circunferentiam duæ rectæ lineæ contingentes in unum punctum conveniant: diameter, quæ ab eo puncto ducitur, lineam tactus coniungentem bifariam ſecabit.

SIT coni ſectio, vel circuli circunferentia B C; & ducantur duæ rectæ lineæ B A, A C ipſam contingentes, quæ conveniant in A: & iuncta B C, per A ducatur ſectionis diameter A D. Dico B D ipſi D C æqualem eſſe. Non enim: ſed ſi fieri poteſt; ſit B E æqua-

A lis E C: & iungatur A E. Ergo A E diameter eſt ſe-

B ctionis. eſt autem & A D; quod eſt abſurdum. ſi enim ſectio eſt ellipſis; punctum A, in quo conveniunt diametri, centrum erit ſectionis extra ipſam; quod fieri non poteſt: ſi verò ſit parabole; diametri ipſius inter ſeſe convenient: quòd ſi hyperbole, quoniam lineæ B A, A C ſectioni occurrunt, & unius occurſus al-

25. huius terius occurſu non continetur; convenient inter ſeſe intra angulum hyperbolen continentem. ſed & in ipſo angulo. centrum enim ponitur: cùm D A, A E diametri ſint; quod eſt abſurdum. non igitur B E ipſi E C æqualis erit.



FED. COMMANDINVS.

A ERGO A E diameter eſt ſectionis.] *Ex antecedente.*

B Eſt autem & A D; quod eſt abſurdum.] *Nam ſi ſint duæ diametri A E, A D; ſequitur abſurdum in omnibus coni ſectionibus. in parabola enim ſequitur diametros inter ſeſe convenire, quas æquidiſtantes eſſe conſtat: ſed in reliquis, quoniam diametri in centro conveniunt, erit A ipſarum centrum. quare in ellipſi & circulo centrum extra ponitur; quod fieri non poteſt: in hyperbola verò cùm lineæ B A, A C ipſam contingant; convenient quidem, ſed tamen intra angulum, qui hyperbolen continet. atqui conveniunt in ipſo angulo, videlicet in eius centro; quod itidem eſt abſurdum.*

THEOREMA XXX. PROPOSITIO XXXI.

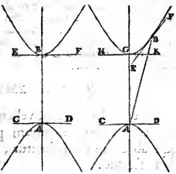
SI utranque oppoſitarum ſectionum duæ rectæ lineæ contingāt: & ſi quidem, quæ tactus coniungit, per centrum tranſeat; contingentes lineæ æquidiſtantes erunt: ſin minùs; convenient inter ſeſe ad eaſdem partes centri.

SINT oppoſitæ ſectiones A, B; & ipſas contingant C A D, E B F: linea verò, quæ ex A ad B ducitur, primùm tranſeat per centrum ſectionum. Dico C D ipſi E F æquidiſtantem eſſe. Quoniam enim oppoſitæ ſectiones ſunt, quarum diameter A B; & unam earum contingit linea C D in puncto A: quæ per B ipſi C D æquidiſtans ducitur, ſectionem continget. contingit autem E F. ergo C D ipſi E F eſt æquidiſtans. Sed non tranſeat per centrum, quæ ex A ad B ducitur: ſitque ſectionum diameter A G; & H K ſectionem in G contingat. ergo H K æquidiſtans eſt ipſi C D. Et quoniam hyperbolen duæ rectæ li-

25. huius. neæ contingunt E F, H K; convenient

2. primi inter ſeſe. eſt autem H K ipſi C D

Vitell. æquidiſtans. quare & C D, E F productæ inter ſe conveniant neceſſe eſt, & ad eaſdem centri partes,



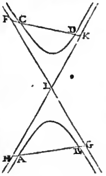
FED.

FED. COMMANDINVS.

QVÆ per B ipſi C D æquidiſtans ducitur, ſectionem continget.) *Illud verò nos demonſtrauimus in commentarijs in quadrageſimam primam primi huius.*

THEOREMA XXXI. PROPOSITIO XXXII.

SI utrique oppoſitarum ſectionum rectæ lineæ occurrant, ipſas vel in uno puncto contingentes, vel in duobus ſecantes; & productæ inter ſe conveniant: punctum, in quo conveniunt, erit in angulo, qui deinceps eſt angulo ſectionem continenti,



SINT oppoſitæ ſectiones, quas vel in uno puncto contingant, vel in duobus ſecent rectæ lineæ A B, C D: & productæ inter ſe conveniant. Dico punctum, in quo conveniunt, eſſe in angulo, qui deinceps eſt angulo ſectionem continenti. Sint enim ſectionum aſymptoti F G, H K. ergo A B producta aſymptotis occurret. occurrat in H, G punctis. Et quoniam ponimus lineas C D, H G inter ſe convenire, neceſſe eſt, ut conveniant in locum, qui eſt ſub angulo HLF, vel KLG. ſimiliter idem demonſtrabitur, etiamſi AB, CD ſectiones contingant. A 8.huius. B

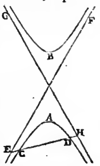
FED. COMMANDINVS.

DICO punctum, in quo conveniunt, eſſe in angulo, qui deinceps eſt angulo ſectionem continenti.) *In angulo intellige in loco, qui eſt ſub lineis angulum continentibus.* A

Similiter idem demonſtrabitur, etiamſi A B, C D ſectiones contingant. *Nam quanquam contingant ſectiones, tamen aſymptotis occurrent ex tertia huius. Idem quoque ſequitur; ſi altera contingat ſectionem, altera in duobus punctis ſecet.* B

THEOREMA XXXII. PROPOSITIO XXXIII.

SI uni oppoſitarum ſectionum recta linea occurrens, & producta ex utraque parte extra ſectionem cadat: cum altera ſectione non conveniet; ſed tranſibit per tres locos; quorum unus quidem eſt ſub angulo ſectionem continente; duo verò ſub ijs angulis, qui deinceps ſunt.



SINT oppoſitæ ſectiones A, B: & ſectionem A ſecet quædam recta linea CD; ita ut producta ex utraque parte extra ſectionem cadat. Dico CD cum B ſectione non convenire. Ducātur enim aſymptoti ſectionū EF, GH. Ergo CD producta aſymptotis occurret. non occurret autem in alijs punctis, quàm in E, H. ergo non conveniet cum ſectione B: & per tres locos tranſibit. ſi enim cum utraque oppoſitarum ſectionum conveniret, nulli ipſarum in duobus punctis occurreret, propter ea, quæ ſuperiùs demonſtrata ſunt. 8.huius. A B

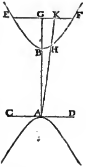
FED. COMMANDINVS.

A NON occurret autem in alijs punctis, quàm in E, H.) *Alioqui ſequeretur, ut duarum rectarum linearum ijdem termini eſſent; quod eſt abſurdum.*

B Si enim cum utraque oppoſitarum ſectionum conveniret; nulli ipſarum in duobus punctis occurreret.) *Nam linea, quæ ſecat utranque continentium angulum, qui deinceps eſt angulo ſectiones continenti, cum utraque oppoſitarum ſectionum in uno tantum puncto convenit, ex decima ſexta huius. Idem etiam eveniet; ſi linea C D ſectionem contingat: quoniam producta cum utraque aſymptoton conveniet, ex tertia huius; & reliqua ſimiliter demonſtrabuntur.*

THEOREMA XXXIII. PROPOSITIO XXXIV.

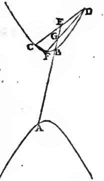
SI unam oppoſitarum ſectionum recta linea cõtingat;& huic æquidiſtans ducatur in altera ſectione: quæ à tactu ad mediam lineæ æquidiſtãtis ducitur, oppoſitarum ſectionũ diameter erit.



SINT oppoſitæ ſectiones A, B; quarum unam, videlicet A contingat in A puncto recta linea C D: ipſique C D æquidiſtans ducatur E F in altera ſectione; & ſecta E F in G biſariam, iungatur A G. Dico A G oppoſitarum ſectionum diame-
5. huius. trum eſſe. Si enim fieri poteſt; ſit diameter A H K. Ergo quæ in H ſectionem contingit, æquidiſtans eſt ipſi C D.
47. primi huius. ſed & C D ipſi E F eſt æquidiſtans. quare ea, quæ contingit ſectionem, æquidiſtat E F: & propterea E K ipſi K F eſt æqualis; quod fieri non poteſt. eſt enim E G æqualis G F. non igitur A H diameter eſt oppoſitarum ſectionum. ex quibus manifeſtè conſtat A B ipſarum diametrum eſſe.

THEOREMA XXXIV. PROPOSITIO XXXV.

SI diameter in una oppoſitarum ſectionum rectam lineam bifariam ſecet: quæ in termino diametri contingit alteram ſectionem, lineæ bifariam ſectæ erit æquidiſtans.

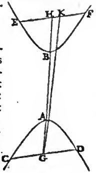


SINT oppoſitæ ſectiones A, B; quarum diameter A B in B ſectione rectam lineam C D bifariam ſecet in E. Dico lineam, quæ in puncto A ſectionem contingit, ipſi C D æquidiſtantem eſſe. Si enim fieri poteſt; ſit lineæ in
48. primi huius. A contingenti æquidiſtans D F. Ergo D G ipſi G F eſt
2. ſexti. æqualis. ſed & D E æqualis eſt E C. æquidiſtat igitur
22. primi huius. C F ipſi E G; quod eſt abſurdum: producta enim C F cum ipſa E G conveniet. quare neque D F lineæ ad A contingenti eſt æquidiſtans, neque alia quæpiam præter ipſam C D.

THE-

THEOREMA XXXV. PROPOSITIO XXXVI.

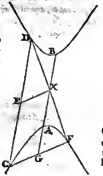
SI in utraque oppoſitarum ſectionum rectæ lineæ inter ſe æquidiſtantes ducantur: quæ ipſarum medium coniungit, oppoſitarum ſectionum diameter erit.



SINT oppoſitæ ſectiones A,B; in quarum utraque ducantur rectæ lineæ C D, E F inter ſe æquidiſtantes: & in punctis G, H bifariam ſecentur; & iungatur G H. Dico G H diametrum eſſe oppoſitarum ſectionum. Si enim non eſt; ſit G K. Ergo quæ in A ſectiones contingit, ipſi C D eſt
æquidiſtans: & iccirco ipſi E F. æquales igitur ſunt 5. huius.
E K, K F; quod fieri non poteſt: quoniam & E H, H F ſunt æquales. ergo G K non eſt diameter oppoſitarum ſectionum. quare relinquitur G H ipſarum diametrum eſſe.

THEOREMA XXXVI. PROPOSITIO XXXVII.

SI oppoſitas ſectiones recta linea ſecet, non tranſiens per centrum: quæ à medio ipſius ad centrum ducitur, oppoſitarum ſectionum diameter erit, quæ recta appellatur; tranſverſa verò diameter, ipſi coniugata, eſt ea, quæ à centro ducitur æquidiſtans lineæ bifariam ſectæ.



SINT oppoſitæ ſectiones A,B; & ipſas ſecet recta linea CD,
non tranſiens per centrum, quæ bifariam in E dividatur: ſitque ſectionum centrum X; & iungatur X E; & per X ipſi
C D æquidiſtans ducatur A B. Dico A B, E X diametros eſſe coniugatas oppoſitarum ſectionum. Ducta enim D X ad F
producatur; & iungatur C F. æqualis igitur eſt D X ipſi X F. A
eſt autem & D E æqualis E C. ergo E X, C F inter ſe æquidi- 2. ſexti.
ſtant. itaque producatur B A ad G. Et quoniam D X, X F B
ſunt æquales; & E X, G F æquales erunt: & propterea ipſæ C
C G, G F. ergo quæ ad A ſectionem contingit, æquidiſtans 6. huius.
eſt C F. quare & ipſi E X. lineæ igitur A B, E X oppoſitarum 16. primi huius.
ſectionum coniugatæ diametri erunt.

FED. COMMANDINVS.

ÆQVALIS igitur eſt D X ipſi X F.] *Ex trigeſima propoſitione primi huius.* A

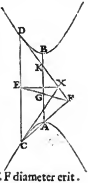
Et quoniam D X, X F ſunt æquales; & E X, G F æquales erunt.) *Cum enim E X, C F æquidiſtent; erit triangulum D E X ſimile triangulo X G F. quare ut D X ad X E, ita X F ad F G: & permutando ut D X ad X F, ita E X ad G F, æqualis igitur eſt E X ipſi G F.* B 14. quinti

Et propterea ipſæ C G, G F.] *Nam & C G eidem E X eſt æqualis, ex trigeſima quarta primi elementorum.* C

THE-

THEOREMA XXXVII. PROPOSITIO XXXVIII.

SI oppoſitas ſectiones duæ rectæ lineæ contingant, in unum punctum convenientes: quæ ab eo puncto ad medium lineæ tactus coniungentis ducitur, oppoſitarum ſectionum diameter erit, quæ recta vocatur; transverſa verò, ipſi coniugata, quæ per centrum ducitur, lineæ tactus coniungenti æquidiſtans.



SINT oppoſitæ ſectiones A, B, quas rectæ lineæ C X, X D contingant: & ducta C D biſariam dividatur in E; & iungatur E X. Dico E X diametrum rectam eſſe; transverſam verò, ipſique coniugatam, quæ per centrum ducitur lineæ C D æquidiſtans. Sit enim diameter E F; ſi fieri poteſt: & ſumatur quod-
A vis punctum F. ergo D X ipſi E F occurret. occurrat in F pun-
B cto, & iungatur C F. conveniet igitur C F cum ſectione. conveniat autem in A: & per A ducatur A B, quæ lineæ C D ſit æquidiſtans. Itaque quoniam E F diameter eſt, ſecans C D biſariam: & ipſi æquidiſtantes lineas biſariam ſecabit. quare A G
C ipſi G B eſt æqualis. ſed cùm C E ſit æqualis E D; erit in triangulo C F D linea A G æqualis G K. ex quo ſequitur &
D G K ipſi G B æqualem eſſe; quod fieri non poteſt. non igitur E F diameter erit.

FED. COMMANDINVS.

A ERGO D X ipſi E F occurret.] *Si enim à puncto D linea ordinatim applicetur in B ſectione, æquidiſtabit lineæ E F. quare & D X ipſi E F occurrat neceſſe eſt, ex ſecunda propoſitione Vitellionis.*

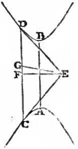
B Conveniet igitur C F cum ſectione.) *Nam cùm C X contingat ſectionem; linea C F eandem neceſſariò ſecabit, ex trigeſima ſecunda primi huius.*

C Erit in triangulo C F D linea A G æqualis G B.) *Vide, quæ ſcripſimus in ſextam primi huius.*

D Non igitur E F diameter erit.) *Deeſt hoc loco principalis concluſio, quam nos ſupplere debemus. ex his enim neceſſariò colligitur, lineam E X oppoſitarum ſectionum diametrum rectam eſſe: at verò tranſverſam eſſe eam, quæ per centrum ducitur ipſi C D æquidiſtans, demonſtrabimus, ut in antecedenti propoſitione.*

THEOREMA XXXVIII. PROPOSITIO XXXIX.

SI oppoſitas ſectiones contingant duæ rectæ lineæ in unum punctum convenientes: quæ per punctum illud & per centrum ducitur, lineam tactus coniungentem biſariam ſecabit.



SINT oppoſitæ ſectiones A, B, quas duæ rectæ lineæ C E, E D contingant: & iuncta C D, ducatur diameter E F. Dico C F ipſi F D eſſe æqualem. Si enim non ita ſit; ſecetur C D biſariam in
A G: & iungatur G E. Ergo G E diameter eſt. ſed & E F eſt dia-
B meter. punctum igitur E centrum erit: icircoque lineæ, quæ
C contingunt ſectiones, in centro ipſarum convenient; quod eſt abſurdum. conſtat ergo C F ipſi F D æqualem eſſe.

FED.

FED. COMMANDINVS.

ERGO G E diameter eſt.) *Ex antecedenti propoſitione.* A

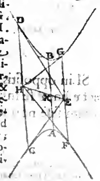
Punctum igitur E centrum erit.] *Centrum enim eſt, in quo oppoſitarum ſectionum diametri conveniunt.* B

Quod eſt abſurdum.] *Siquidem lineæ, quæ contingunt oppoſitas ſectiones, extra centrum earum conveniunt, videlicet in angulo, qui deinceps eſt angulo ſectiones continenti; ut conſtat ex trigeſima ſecunda huius.* C

THEOREMA XXXIX. PROPOSITIO XL.

SI oppoſitas ſectiones duæ rectæ lineæ contingentes in unum conveniant; & per punctum, in quo conveniunt, linea ducatur, tactus coniungenti æquidiſtans, & ſectionibus occurrens: quæ ab occurſibus ad medium lineæ tactus coniungentis ducuntur, ſectiones ipſas contingunt.

SINT oppoſitæ ſectiones A,B, quas duæ rectæ lineæ C E, E D contingant; iungaturque C D; & per E ducatur F E G ipſi C D æquidiſtans; ſecta autem C D bifariam in H, iungantur F H, H G. Dico F H, H G ſectiones contingere. Ducatur enim E H. ergo E H recta diameter eſt; tranſverſa verò, ipſi coniugata, quæ per centrum ducitur æquidiſtans C D. itaque ſumatur centrum X, & ducatur A X B ipſi C D æquidiſtans. Ergo H E, A B coniugatæ diametri ſunt, atque ordinatim applicata eſt C H ad ſecundam diametrum; & C E ſectionem contingit, ſecundæ diametro occurrens: rectangulum igitur E X H æquale eſt quadrato dimidiæ ſecundæ diametri, hoc eſt quartæ parti figuræ, quæ ad A B conſtituitur. & quoniam F E ordinatim applicatur; & iungitur F H; perſpicuum eſt F H contingere ſectionem A. ſimiliter & G H continget ſectionem B. lineæ igitur F H, H G ſectiones A,B neceſſario contingunt.



A

B

C

FED. COMMANDINVS.

ERGO E H recta diameter eſt; tranſverſa verò, ipſi coniugata.) *Ex trigeſima octava huius.* A

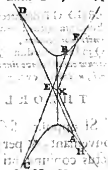
Rectangulum igitur E X H æquale eſt quadrato dimidiæ ſecundæ diametri.] *Ex trigeſima octava primi huius.* B

Perſpicuum eſt F H contingere ſectionem A.] *Ex iis, quæ nos demonſtravimus in commentariis trigeſima octava primi huius.* C

THEOREMA XL. PROPOSITIO XLI.

SI in oppoſitis ſectionibus duæ rectæ lineæ ſe invicem ſecent, non tranſeuntes per centrum; ſeſe bifariam non ſecabunt.

SINT



SINT oppoſitæ ſectiones A,B; in quibus duæ rectæ lineæ C B, A D, per centrum non tranſeuntes, ſe invicem ſecent in E. Dico eas bifariam ſeſe non ſecare. Si enim fieri poteſt; ſecent ſeſe bifariam: ſitque X ipſarum centrum; &
A iungatur E X. ergo E X diameter eſt. ducatur per
B X lineæ B C æquidiſtans X F. Erit X F diameter ipſi E X coniugata. quæ igitur in F ſectionem contingit, eſt æquidiſtans E X. eadem ratione ſi ducatur H X æquidiſtans A D; quæ in H contingit ſectionem, ipſi E X erit æquidiſtans. ergo quæ contingit ſectionem in F æquidiſtans eſt lineæ in H contingen-
C ti; quod fieri non poteſt. conveniunt enim inter ſeſe, ut iam demonſtratum eſt. non igitur C B, A D per centrum non tranſeuntes ſeſe bifariam ſecant.

FED. COMMANDINVS.

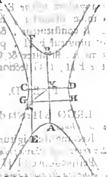
A ERGO E X diameter eſt.] *Ex trigeſima ſeptima huius.*

B Erit X F diameter ipſi E X coniugata. *Ex eadem.*

C Conveniunt enim inter ſeſe, ut iam demonſtratum eſt.) *Cum enim linea, tactus F, H coniungens, non tranſeat per centrum; quæ ſectionem contingit in F, non æquidiſtabit lineæ in H contingenti, ſed cum ea conveniet ad eaſdem partes centri, ex trigeſima quarta primi huius.*

THEOREMA XLI. PROPOSITIO XLII.

SI in oppoſitis ſectionibus, quæ coniugatæ appellantur, duæ rectæ lineæ ſe invicem ſecent, non tranſeuntes per centrum; bifariam ſeſe non ſecabunt.



SINT oppoſitæ ſectiones, quæ coniugatæ appellantur A B, C D: & in ipſis duæ rectæ lineæ E F, G H, non tranſeuntes per centrum, ſe invicem ſecent in K. Dico E F, G H ſeſe bifariam non ſecare. Si enim fieri poteſt; ſecent ſe bifariam; & ſit X ſectionum centrum: ducatur autem A B æquidiſtans E F, & C D ipſi G H æquidiſtans; & iungatur K X.
A Ergo K X, A B coniugatæ diametri ſunt. & ſimiliter coniu-
B gatæ ſunt diametri K X, C D. quare linea, contingens ſectionem in A, æquidiſtat lineæ in C contingenti; quod fieri non
C poteſt. conveniunt enim inter ſeſe: quoniam contingens in C ſectiones A,B ſecat; & contingens in A ſecat ipſas C, D;
D patet igitur eas convenire in locum, qui eſt ſub angulo A X C. non igitur E F, G H, per centrum non tranſeuntes, ſeſe bifariam ſecant.

FED. COMMANDINVS.

A ERGO K X, A B coniugatæ diametri ſunt.) *Ex trigeſima ſeptima huius.*

B Quare linea, contingens ſectionem in A, æquidiſtat lineæ in C contingenti.) *Nam quæ in A ſectionem contingit, æquidiſtans eſt ipſi K X: & ſimiliter quæ contingit in C,*
30 primi. *eidem eſt æquidiſtans. quæ autem æquidiſtant uni & eidem, & inter ſeſe æquidiſtant. linea igitur contingens ſectionem in A æquidiſtat ei, quæ in ipſo C contingit.*

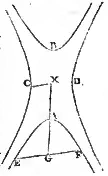
Con-

Conveniunt enim inter ſeſe: quoniam contingens in C ſectiones A,B ſecat; & contingens in A ſecat ipſas C,D.) *Ex decima nona huius.* C

Patet igitur eas convenire in locum, qui eſt ſub angulo A X C.] *Conveniunt enim ad eam aſymptoton, quæ inter A X, X C interijcitur, ex vigeſima prima huius.* D

THEOREMA XLII. PROPOSITIO XLIII.

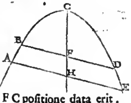
SI unã oppoſitarum ſectionum, quæ coniugatæ appellantur, recta linea in duobus punctis ſecet; & à centro duæ lineæ ducãtur, una quidem ad medium lineæ ſecantis, altera verò ipſi æquidiſtans: erunt hæ oppoſitarum ſectionum coniugatæ diametri.



SINT oppoſitæ ſectiones, quæ coniugatæ appellantur, A B, C D; & ſectionẽ A quædam recta linea ſecet in duobus punctis E, F; & E F bifariam dividatur in G: ſit autẽ X ſectionũ centrũ; iungaturque X G; & C X ipſi E F æquidiſtans ducatur. Dico A X, X C coniugatas diametros eſſe. Quoniam enim diameter eſt A X; & lineam E F bifariam ſecat: quæ in A contingit ſectionem æquidiſtans eſt ipſi E F. quare & ipſi C X. 5.huius. & quoniam oppoſitæ ſectiones ſunt; & unam ipſarum, videlicet A quædam recta linea in A contingit; à centro verò X ducuntur duæ lineæ, una quidem X A ad tactum, altera verò C X contingenti æquidiſtans: erunt A X, X C ſectionum coniugatæ diametri. hoc enim ſuperiùs demonſtratum eſt. 10.huius.

PROBLEMA II. PROPOSITIO XLIV.

DATA coni ſectione, diametrum invenire.

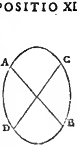


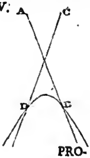
SIT data coni ſectio, in qua puncta A, B, C, D, E: & oporteat ipſius diametrum invenire. Itaque factum iam ſit; & diameter ſit C H: ductis autem ordinatim lineis D F, E H, & productis; erit D F æqualis F B; & E H ipſi H A. ſi igitur ordinabimus B D, A E, ut ſint poſitione æquidiſtantes; data erunt puncta H, F. quare & H F C poſitione data erit.

COMPONETVR autẽ in hunc modũ. Sit data coni ſectio, in qua A, B, C, D, E puncta: ducanturque lineæ BD, AE inter ſe æquidiſtantes; & in punctis F, H bifariã dividantur. Ergo iuncta FH diameter erit ſectionis. Eadẽ ratione & infinitas diametros inveniemus.

PROBLEMA III. PROPOSITIO XLV.

DATA ellipſi vel hyperbola, centrum invenire.



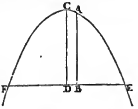


HOC autem manifeſtè conſtat. Si enim duæ ſectionis diametri A B, C D ducantur; punctum, in quo ſe ſecant, centrum erit ſectionis, ut poſitum iam eſt.

PROBLEMA IV. PROPOSITIO XLVI.

DATA coni ſectione, axem invenire.

SIT coni ſectio data primùm parabole, in qua puncta F,C,E. Itaque oportet ipſius axem invenire. Ducatur enim diameter A B: & ſi quidem A B ſit axis; factum erit, quod proponebatur: ſin minùs; ponatur iam factum eſſe; & ſit axis C D. Ergo C D ipſi A B eſt æquidiſtans.& quæ ad ipſam ducuntur,perpendiculares ſunt. ergo C D biſariam dividit perpendiculares, quæ ad A B ducuntur. ſi igitur ordinabimus E F perpendicularem ad A B; erit ea poſitione data: & icciro E D æqualis D F. quare punctum D datum erit. dato autem D puncto, & ducta D C, quæ lineæ A B poſitione datæ ſit æquidiſtans; erit & ipſa D C poſitione data.

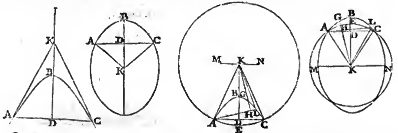


COMPONETVR autem in hunc modum.Sit data ſectio parabole,in qua puncta F,C,E;ducaturque diameter A B: & B E ad ipſam perpendicularis, quæ ad F producatur. Si ergo E B ſit æqualis B F; perſpicuè conſtat A B axem eſſe: ſin minùs; dividatur E F in D biſariam; & ipſi A B æquidiſtans ducatur C D: erit utique C D ſectionis axis(eſt enim diametro æquidiſtans) hoc eſt diameter, quæ lineam E F & bifariam & ad rectos angulos dividit. datæ igitur parabolæ axis inventus eſt C D. Itaque patet unum eſſe parabolæ axem. nam ſi alius axis ſit, ut A B; erit ipſi C D æquidiſtans, & ſecabit E F. quare & biſariam ſecabit. ergo B E eſt æqualis B F; quod fieri non poteſt.

PROBLEMA V. PROPOSITIO XLVII.

DATA hyperbola vel ellipſi, axem invenire.

SIT hyperbole vel ellipſis A B C: & oporteat ipſius axem invenire. Sit iam inventus; & ſit K D:centrum verò ſectionis ſit K. ergo K D lineas,quæ ad ipſam ordinatim applicantur, biſariam & ad rectos angulos ſecat. itaque ducatur perpendicularis C D A; & K A, K C iungantur. Quoniam igitur C D æqualis eſt D A. &
26. libri Dator. C K ipſi K A eſt æqualis. ergo ſi punctum K datum ſit; erit linea C K data. quare ex centro K & intervallo C K circulus deſcriptus & per ipſum A tranſibit; & erit poſitione datus. eſt autem & A B C ſectio data poſitione.ergo & punctum A.ſed & C
26. libri Dator. 7. eſt datū. data igitur poſitione linea C A. & eſt C D ipſi D A æqualis. ergo punctum D datur. ſed & ipſum K. linea igitur D K poſitione data erit.



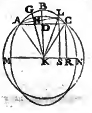
COMPONETVR autem hoc modo.Sit data hyperbole vel ellipſis A B C; & ſumpto K ipſius centro, in ſecti ne ſumatur quodvis punctum C; & ex centro K, intervalloque K C circulus deſcribatur C E A: ducta verò C A biſariam ſecetur in D; &

D; & iungantur K C, K D, K A; & K D ad B producatur. Itaque
quoniam A D eſt æqualis D C. & D K communis. erunt duæ lineæ C D, D K
duabus A D, D K æquales. & baſis K A æqualis baſi K C. quare linea K D B ipſam 12.primi.
A D C bifariam & ad rectos angulos ſecat: & icciręo K D eſt axis. ducatur
per K ipſi C A æquidiſtans M K N. ergo M N eſt axis ſectionis ipſi B K coniugatus.

THEOREMA XLIII. PROPOSITIO XLVII.

HIS autem demonſtratis, reliquum eſt, ut oſtendamus non eſſe alios axes ipſarum ſectionum.

SI enim fieri poteſt; ſit axis alius K G. ergo ducta perpendiculari A H, ex ijs,
quæ ſupra diximus, erit A H æqualis H L. quare & A K ipſi K L. ſed & ipſi K C.
ſunt igitur K L, K C inter ſe æquales; quod eſt abſurdum. At verò circulum A E C
non occurrere ſectioni in alio puncto inter A C, in hyperbola quidem perſpicuum
eſt: ſed in ellipſi, ducantur perpendiculares C R, L S. Et quoniam K C eſt æqualis A
K L; ex centro enim ſunt: erit & quadratum C K quadrato K L æquale. quadra- 47.primi.
to autem K C æqualia ſunt quadrata C R, R K: & quadra-
to K L æqualia quadrata L S, S K. ergo quadrata C R, R K
quadratis L S, S K æqualia erunt. quo igitur differt qua- B
dratum C R à quadrato L S, eo quadratum S K differt à
quadrato K R. rurſus quoniam rectangulum M R N unà 5.ſecundi.
cum quadrato R K æquale eſt quadrato K M. rectangulum
autem M S N unà cum quadrato S K eidem K M quadrato
eſt æquale. erit rectangulum M R N unà cum quadrato R K
æquale rectangulo M S N unà cum S K quadrato. ergo quo
differt quadratum S K à quadrato K R, eo rectangulum
M R N differt à rectangulo M S N. ſed demonſtratum eſt, quo quadratum S K dif-
fert à quadrato K R, eo differre C R quadratum à quadrato L S. quo igitur differt C
quadratum C R à quadrato L S, eo rectangulum M R N à rectangulo M S N dif-
fert. itaque cùm applicatæ ſint C R, L S; erit ut quadratum C R ad rectangulum D
M R N, ita quadratum L S ad rectangulum M S N. demonſtratum autem eſt in
utriſque eundem eſſe exceſſum. ergo quadratum C R rectangulo M R N eſt æqua- E
le. & quadratum L S æquale rectangulo M S N. circulus igitur eſt linea L C M; F
quod eſt abſurdum. poſuimus enim ellipſim eſſe.

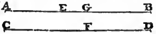


EVTOCIVS.

QVO igitur differt quadratum C R à quadrato L S, eo quadratum S K differt B
à quadrato K R.

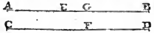
SINT duæ magnitudines æquales AB, CD; & dividantur in partes inæquales in punctis E, F. Dico, quo differt AE à CF, eo EB differre ab FD.

PONATVR ipſi C F æqualis A G. ergo E G eſt exceſſus magnitudinum A G, A E, hoc eſt C F, A E: eſt enim A G æqualis C F. ſed & A B ipſi C D. reliqua igitur G B reliquæ F D eſt æqualis. quare EG eſt exceſſus ipſarum E B, B G, hoc eſt E B, F D.



SED ſint quatuor magnitudines A E, E B, C F, F D; & differat

AE à CF eo, quo EB differt ab FD. Dico utraque AE, EB utriſque CF, FD æqualia eſſe.



PONATVR rurſus AG æqualis CF. Ergo EG eſt exceſſus magnitudinum AE, CF. eodem autem differunt AE, CF; & EB, FD. æquales igitur ſunt GB, FD. ſed & AG, CF æquales. ergo AB ipſi CD æqualis erit. perſpicuum igitur eſt, ſi prima excedat ſecundam magnitudine aliqua; & eadem magnitudine tertia quartam excedat: primam & quartam ſecundæ & tertiæ æquales eſſe iuxta arithmeticam proportionem. Itaque his poſitis, ſi ſit ut prima ad tertiam, ita ſecunda ad quartam: prima quidem tertiæ æqualis erit; ſecunda verò quartæ. poteſt enim hoc in alijs demonſtrari, propterea quòd in vigeſimo quinto theoremate quinti libri elementorum Euclidis demonſtratum eſt, ſi quatuor magnitudines proportionales ſint, primam & quartam reliquis duabus maiores eſſe.

FED. COMMANDINVS.

A ET quoniam KC eſt æqualis KL, ex centro enim ſunt.) *Nam ſi ponamus utraque puncta C, L eſſe in ellipſi & circulo; erunt lineæ KC, KL ex circuli centro: & idcirco inter ſe æquales.*

C Quo igitur differt quadratum CR à quadrato LS, eo rectangulum MRN à rectangulo MSN differt.] *Ex his ſequitur per ea, quæ Eutocius hoc loco demonſtravit, quadratum CR unà cum rectangulo MSN æquale eſſe quadrato SL unà cum MRN rectangulo.*

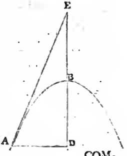
D Itaque cùm applicatæ ſint CR, LS; erit ut quadratum CR ad rectangulum MRN, ita quadratum LS ad rectangulum MSN.) *Ex vigeſima prima primi huius. quadratum enim CR ad rectangulum MRN eam proportionem habet, quam figuræ rectum latus ad tranſverſum. & eandem habet quadratum LS ad rectangulum MSN. quare ſequitur, ut quadratum CR ad MRN rectangulum, ita eſſe quadratum LS ad rectangulum MSN.*

E Ergo quadratum CR rectangulo MRN eſt æquale.) *Si enim fieri poteſt; non ſit æquale quadratum CR rectangulo MRN. & cum quadratum CR ad rectangulum MRN eandem proportionem habeat, quam quadratum LS ad MSN rectangulum: erit ex vigeſima quinta quinti elementorum quadratum CR unà cum rectangulo MSN vel maius, vel minus quadrato SL unà cum rectangulo MRN; quod eſt abſurdum. ſupra enim demonſtravimus ea inter ſeſe æqualia eſſe.*

F Circulus igitur eſt linea LCM.) *Ex ſecundo lemmate Pappi in primũ librum, & ex ijs, quæ Eutocius in quintam propoſitionem primi libri demonſtravit.*

PROBLEMA VI. PROPOSITIO XLIX.

DATA coni ſectione, & puncto non intra ſectionẽ dato, ab eo rectã lineam ducere, quæ ſectionem contingat.



SIT data coni ſectio primùm parabole, cuius axis BD: & oporteat à puncto non intra ſectionem dato rectam lineam ducere, ut ante propoſitum eſt. Itaque datum punctum vel eſt in linea, vel in axe, vel in loco, qui extra relinquitur.

SIT primùm in linea, quod ſit A: ponaturque iam factum eſſe; & ſit linea AE. ducatur autem perpendicu-
A B laris AD, quæ poſitione data erit: & erit BE æqualis BD. at BD eſt data. data igitur eſt BE; eſtque pun-
C ctum B datum ergo & punctum E. ſed datum quoque
D eſt A punctum. linea igitur AE poſitione data erit.

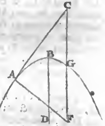
COM-

COMPONETVR autem in hunc modum. Ducatur ex puncto A perpendicula-
ris A D: ponaturque B E ipſi B D æqualis; & iungatur A E. Lineam igitur A E ſe-
ctionem contingere manifeſtò conſtat. E

SIT rurſus punctum E in axe datum; ductaque iam ſit linea A E ſectionem con-
tingens: & perpendicularis ducatur A D. Ergo B E eſt æqualis B D. & eſt data
B E. quare & B D. ſed datum eſt B punctum. ergo & D datum erit. quòd cùm F
D A perpendicularis ſit; & poſitione erit data. quare & punctum A. ſed & E G H
datum. linea igitur A E poſitione data erit.

COMPONETVR verò in hunc modum. Ponatur ipſi B E æqualis B D: & à
puncto D ducatur D A ipſi E D perpendicularis; iungaturque A E. Manifeſtum eſt 35. primi
lineam A E contingere ſectionem:. ſed & illud conſtat, ſi datum punctum ſit idem, huius.
quod B, lineam, quæ ab eo perpendicularis ducitur, ſectionem ipſam contingere. K

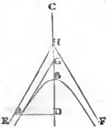
SIT datum punctum C; & factum iam ſit, quod proponebatur: ſitque linea C A
contingens; & per C ducatur C F æquidiſtans axi, hoc eſt
ipſi D B. ergo C F poſitione data eſt: & à puncto A ad C F
ordinatim applicetur A F. Erit C G æqualis G F. & G eſt L
datum. datum igitur erit & ipſum F. ordinatim autem
applicatur F A, hoc erit æquidiſtans ei, quæ in G ſectionem
contingit. data igitur eſt F A poſitione: & icciro pun-
ctum A datum. ſed & punctum C. ergo C A poſitione da-
ta erit.



COMPONETVR autem hoc modo. Ducatur per C ipſi
BD æquidiſtans CF; ponaturque FG æqualis GC: & ei, quæ
in G contingit ſectionem, æquidiſtans ducatur FA; & AC
iungatur. Perſpicuum igitur eſt lineam A C facere illud, quod faciendum pro-
ponebatur.

SIT rurſus hyperbole, cuius axis C B D, centrum H, & aſymptoti H E, H F:
punctum verò datum, vel in ſectione erit, vel in axe,
vel intra angulum lineis E H F contentum, vel in loco,
qui deinceps eſt, vel in una aſymptoton continentium
ſectionem, vel in loco intermedio inter continentes an-
gulum ad verticem eius, qui lineis FHE cõprehenditur.

ITAQVE ſit primùm in ſectione, ut A; factumque iam
ſit; & linea A G ſectionem contingat: ducatur autem
perpendicularis AD; & BC ſit tranſverſum figuræ latus.
Erit ut C D ad DB, ita CG ad GB. ſed proportio CD ad M
D B eſt data; quòd utraque data ſit. proportio igitur
C G ad G B erit data. & eſt data B C. quare & G datum.
ſed & ipſum A. ergo A G poſitione data erit. N



COMPONETVR autem ſic. Ducatur à puncto A perpendicularis A D: & pro-
portio C G ad G B eadẽ ſit, quæ CD ad D B; & iungatur A G. Patet igitur lineam
A G contingere ſectionem. O

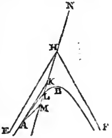
RVRSVS ſit datum punctũ G in axe: & factũ iam ſit; ducaturque contingens AG;
& A D perpendicularis. Erit eadem ratione, ut C G ad G B, ita C D ad D B; & 36. primi
data eſt C B D. ergo punctum D datum. eſt autem D A perpendicularis. quare huius.
& poſitione data erit. & eſt ſectio data poſitione. datum igitur eſt A punctum.
ſed & ipſum G. ergo A G poſitione dabitur.

COMPONETVR autem hoc modo. Ponantur alia eadem; & fiat proportio
C D ad D B eadem, quæ eſt C G ad G B: & ducta D A perpendiculari, iungatur
A G. Conſtat igitur lineam A G facere illud, quod proponebatur: & à puncto G 34. primi
ad partes oppoſitas alteram duci lineam, quæ ſectionem contingat. huius.

IISDEM poſitis, ſit datum punctum K in loco, qui intra angulum E H F conti-
netur:

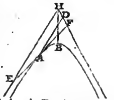
Digitized by Google

netur : & oporteat ab eo puncto lineam ducere, quæ ſectionem contingat. Ponatur iam factum eſſe; & ſit linea contingens K A: iungatur autem K H, & producatur; adeo ut ipſi L H ſit æqualis H N. omnia igitur data erunt. quare & ipſa L N. itaque ordinatim applicetur A M ad M N. Erit ut N K ad K L, ita N M ad M L. proportio autem N K ad K L eſt data. data igitur erit & proportio N M ad M L. eſtque punctum L datum.
27. libri Dator. ergo & M. & ordinatim applicata eſt M A æquidiſtans ei, quæ in L ſectionem contingit. quare & M A datur poſi-
28. tione. at poſitione datur ſectio A L B. ergo & punctum
26. A. ſed & K datur. data igitur erit linea A K.



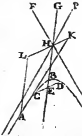
COMPONETVR autem hoc modo. Ponantur alia eadem; & ſit datum punctum K; iunctaque K H producatur; & ſit H N æqualis L H: fiat autem ut N K ad K L, ita N M ad M L; & ei, quæ in L ſectionem contingit, æquidiſtans ducatur M A; & K A iungatur. Ergo K A contingit ſectionem: & manifeſtum eſt ab eodem puncto K ad partes oppoſitas alteram lineam duci, quæ ſectionem contingit.

IISDEM poſitis ſit punctum F datum in una aſymptoton continentium ſectionem: oporteatque à puncto F ducere lineam, quæ ſectionem contingat. Itaque ponatur factum eſſe; & ſit linea contingens F A E: & per
P A ducatur A D ipſi E H æquidiſtans. Erit H D æqualis D F: quoniam & F A ipſi A E eſt æqualis. & data eſt
26. Dat. F H. ergo & punctum D datum. data quoque erit poſi-
7. tione D A, quæ per D ducitur æquidiſtans ipſi H E poſi-
28. tione datæ. & ſectio data eſt poſitione. ergo & punctum A. ſed & F datum. linea igitur F A E poſitione data erit.



COMPONETVR autem hoc pacto. Sit ſectio A B, cuius aſymptoti E H, H F; & datum punctum F ſit in una aſymptoton ſectionem continentium: ſecta autem F H bifariam in D, ducatur per
1. ſexti. D linea D A ipſi H E æquidiſtans; & iungatur F A. Quoniam igitur F D eſt
Q æqualis D H; & F A ipſi A E æqualis erit. quare ex iis, quæ demonſtrata ſunt, linea F A ſectionem contingit.

IISDEM poſitis ſit datum punctum K in loco, qui deinceps eſt angulo ſectionem continenti: & oporteat ab ipſo K lineam ducere, quæ contingat ſectionem. Itaque factum iam ſit; & ſit linea K A; iunctaque K H producatur: erit ea poſitione data. ſi igitur in ſectione ſumatur punctum C; & per C ducatur C D ipſi K H æquidi-
28. libri ſtans: erit C D data poſitione. at ſi C D bifariam ſecetur in E; iunctaque H E pro-
Dator. 37. huius. ducatur: & poſitione data erit, diameter ſcilicet ipſi K H coniugata. ponatur H G æqualis B H: & per A ducatur A L æquidiſtans B G. Quoniam igitur K L, B G coniugatæ diametri ſunt; & A K ſectionem contingit; ipſique
R B G æquidiſtans ducta eſt A L: erit rectangulum K H L æquale quartæ parti figuræ, quæ ad B G conſtituitur. quare & ipſum datum erit. eſt autem K H data. ergo & H L. ſed & poſitione; eſtque datum punctum H. ergo & L. & eum per L ducta ſit L A æquidiſtans B G poſitione datæ; ipſa quoque poſitione dabitur. at ſectio etiam datur poſitione. quare & A punctum. ſed & K. ergo linea A K poſitione data erit.

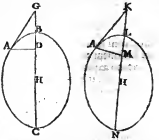


COMPONETVR autem ſic. Ponantur alia eadem; ſitque datum punctum K in loco, quem diximus; & iuncta K H producatur: ſumpto autem in ſectione puncto C, ducatur C D ipſi K H æquidiſtans; & C D bifariam in E ſecetur; iunctaque E H

pro-

producatur; & ipſi B H ponatur æqualis H G. ergo G B tranſverſa diameter eſt, 37. huius. ipſi K H L coniugata. deinde ponatur quartæ parti figuræ, quæ eſt ad B G, æquale rectangulum K H L: perque L ipſi B G æquidiſtans ducatur L A; & K A iungatur. Linea igitur K A ſectionem continget, per converſionem trigeſimi octavi theorematis primi libri. S At ſi in loco inter F H P interiecto aliquod punctum detur; quod propoſitum eſt, fieri non poteſt. linea enim contingens ſecabit G H. quare & utrique ipſarum F H, H P occurret; quod eſt abſurdum, ex ijs, quæ in trigeſimo primo theoremate primi libri, & in tertio huius demonſtrata ſunt.

IISDEM poſitis, ſit ſectio data ellipſis; datum verò punctum in ſectione A: & oporteat ab ipſo A ducere lineam, quæ ſectionem contingat. Itaque ponatur factum eſſe; ſitque linea contingens A G; & ab A ad B C axem ordinatim applicetur A D. 36. primi huius. Erit punctum D datum: & ut C D ad DB, ita erit C G ad G B. ſed proportio C D ad D B eſt data. ergo & proportio C G ad G B data erit: & iccirco punctum G. ſed & A. quare & A G erit poſitione data.



COMPONETVR autem hoc pacto. Ducatur perpendicularis A D: & C G ad G B proportio eadem ſit, quæ proportio C D ad D B; 34. primi huius. iungaturque A G. Conſtat igitur A G ſectionem contingere, quemadmodum & in hyperbola.

SIT rurſus datum punctum K, à quo oporteat contingentem lineam ducere. Itaque factum iam ſit; & ſit linea K A: ductaque K L H ad H centrum producatur in N; erit ea poſitione data: quòd ſi A M ordinatim applicetur; erit ut N K ad K L, ita N M ad M L. 36. primi huius. proportio autem N K ad K L eſt data. ergo & data proportio N M ad M L. quare & punctum M. & applicata eſt M A; æquidiſtat enim lineæ in L contingenti. ergo M A poſitione dabitur: & iceirco punctum A. ſed & ipſum K eſt datum. linea igitur K A poſitione data erit.

COMPOSITIO autem eadem eſt, quæ ſupra.

FED. COMMANDINVS.

QVÆ poſitione data erit.] *Ex trigeſima propoſitione libri Datorum Euclidis.* A

Et erit B E æqualis B D.) *Ex trigeſima quinta primi huius.* B

Ergo & punctum E.] *Ex vigeſima ſeptima libri Datorum.* C

Linea igitur A E poſitione data erit.] *Ex vigeſima ſexta eiuſdem.* D

Lineam igitur A E ſectionem contingere manifeſtò conſtat.) *Ex trigeſima tertia primi huius.* E

Ergo B E eſt æqualis B D.) *Ex trigeſima quinta eiuſdem.* F

Ergo & D datum.] *Ex vigeſima ſeptima libri Datorum.* G

Quòd cùm D A perpendicularis ſit; & poſitione data erit.) *Ex vigeſima nona eiuſdem.* H

Sed & illud conſtat; ſi datum punctum ſit idem, quod B.) *Ex decima ſeptima primi huius.* K

Ergo C F poſitione data erit.] *Ex vigeſima octava libri Datorum.* L

Erit ut C D ad D B, ita C G ad G L.) *Ex trigeſima ſexta primi huius.* M

Et eſt data B C. quare & G datum.] *Quoniam enim linea B C data in datam proportionem dividitur; erunt & C G, G B datæ ex ſeptima libri Datorum. & eſt datum punctum C. ergo & G erit datum, ex vigeſima ſeptima eiuſdem.* N

Patet igitur lineam A G contingere ſectionem.) *Ex trigeſima quarta primi huius.* O

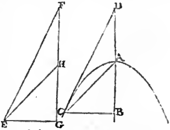
Erit

P Erit H D æqualis D F: quoniam & F A ipſi A E eſt æqualis.] *Nam cum F A ſit æqualis A E, ex tertia huius: & F D ipſi D H æqualis erit, ex ſecunda ſexti elementorum.*
Q Quare ex ijs, quæ demonſtrata ſunt, linea FA ſectionem contingit.] *Ex nona huius.*
R Erit rectangulum KHL æquale quartæ parti figuræ, quæ ad BG conſtituitur.) *Eſt enim, ex trigeſima octava primi huius, rectangulũ KHL æquale quadrato, quod fit ex dimidia ſecunda diametri, hoc eſt æquale quartæ parti figuræ ad BG conſtitutæ: quoniam ſecunda diameter mediũ proportionẽ obtinet inter figuræ latera, ex diffinitione ſecundæ diametri.*
S Linea igitur KA ſectionẽ cõtingit, per converſionem trigeſimi octavi theorematis.] *Hunc locũ nos reſtituimus, etenim in Græco exemplari numerus theorematis deerat. Vide eius demonſtrationẽ in cõmentarijs, quæ nos in trigeſimã octavã primi huius conſcripſimus.*

PROBLEMA VII. PROPOSITIO L.

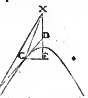
DATA ſectione coni, lineam contingentem ducere, quæ cum axe ad partes ſectionis angulum faciat, dato angulo acuto æqualem.

SIT coni ſectio primùm parabole, cuius axis A B. Itaque oportet lineam ducere, quæ ſectionem contingat; & cum A B faciat angulum ad partes ſectionis, dato angulo acuto æqualem. Ponatur factum eſſe; & ſit linea C D. datus igitur eſt B D C
A angulus. ducatur perpendicularis B C. eſt autem angulus, qui ad B datus. quare
B data eſt proportio D B ad B C. ſed D B ad B A proportio eſt data. proportio igitur
C A B ad B C data erit. & datus angulus, qui ad B. ergo & B A C angulus eſt datus. & eſt ad lineam B A, quæ datur poſitione;
D & ad datum punctum A. linea igitur C A poſitione dabitur. at ſectio data eſt poſitione. ergo punctum C datum. & linea C D ſectionem contingit. quare & poſitione data erit.



COMPONETVR autem problema hoc modo. Sit data coni ſectio primùm parabole, cuius axis A B: datus autem angulus acutus, qui lineis E F G continetur; ſumptoque in linea E F puncto E, ducatur perpendicularis E G; & F G in H bifariam ſecetur; & iungatur H E: deinde angulo G H E æqualis conſtituatur angulus B A C; & ducta perpendiculari C B, lineæ B A ponatur æqualis A D; & C D iungatur. ergo linea C D ſectionem contingit. Dico angulum C D B angulo E F G æqualem eſſe. Quoniam enim eſt ut F G ad G H, ita D B ad B A. & ut H G ad G E, ita A B ad B C. erit ex æquali ut F G ad G E, ita
E D B ad B C. ſed anguli, qui ad G, B, recti ſunt. angulus igitur F angulo D eſt æqualis.

SIT ſectio hyperbole: ponaturque iam factum eſſe; & linea C D ſectionem contingat: ſumpto autem X ſectionis centro, iungatur C X; & C E perpendicularis duca-
37. primi huius. tur. Ergo data eſt proportio rectanguli X E D ad quadratum
F E C: eadem enim eſt, quæ tranſverſi lateris ad rectum. proportio autem quadrati C E ad quadratum E D eſt data; quòd da-
G tus ſit uterque angulorum C D E, D E C. quare & rectanguli
H X E D ad quadratum E D proportio data erit: & iccirco pro-
K portio X E ad E D. ſed angulus, qui ad E, eſt datus. ergo & qui ad X. & ad lineam X E poſitione datam, & ad datum punctum
L X ducta eſt XC in dato angulo. ergo & XC poſitione dabitur.

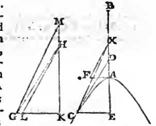


data eſt autem & ipſa ſectio poſitione. quare & C punctum. & ducta eſt C D contingens. linea igitur C D poſitione erit data. Itaque ducatur F X ſectionis aſymptotos.
M N ergo C D producta aſymptoto occurret. occurrat in F. erit F D E angulus angulo F X D maior: & propterea in compoſitione problematis oportebit datum angulum acutum maiorem eſſe, quàm ſit dimidius eius, quem aſymptoti continent.

COM-

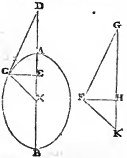
COMPONETVR autem problema hoc modo. Sit data hyperbole, cuius axis quidem A B, aſymptotos autem X F; & datus angulus acutus K H G, qui ſit maior angulo A X F; ſitque angulo A X F æqualis angulus K H L; & à puncto A ad rectos angulos ipſi AB ducatur AF: in linea verò G H ſumatur aliquod punctum G, à quo ad H K perpendicularis ducatur G K. quoniam igitur angulus F X A angulo L H K eſt æqualis. & anguli ad A, K recti ſunt. erit ut X A ad A F, ita H K ad K L. & H K ad K L maiorem proportionem habet, quàm ad K G. ergo & X A ad A F maiorem habet proportionem, quàm H K ad K G; & iccirco quadratum X A ad A F quadratum maiorem habet, quàm quadratum H K ad quadratum K G. ut autem quadratum X A ad quadratum A F, ita tranſverſum figuræ latus ad rectum. quare tranſverſum figuræ latus ad rectum maiorem proportionem habet, quàm quadratum H K ad quadratum K G. ſi igitur fiat, ut quadratum X A ad quadratum A F, ita aliud quoddam ad quadratum K G; erit illud quadrato H K maius. ſit rectangulum M K H: & iungatur G M. itaque quoniam quadratum M K maius eſt rectangulo M K H; habebit quadratum M K ad quadratum K G maiorem proportionem, quàm rectangulum M K H ad idem K G quadratum, hoc eſt maiorem, quàm quadratum X A ad quadratum A F. quòd ſi rurſus fiat, ut quadratum M K ad quadratum K G, ſic quadratum X A ad aliud quoddam; erit id minus quadrato A F; & recta linea, quæ ab X ad ſumptum punctũ ducitur, triãgula ſimilia efficiet: & propterea angulus F X A angulo G M K erit maior. ponatur angulo GMK æqualis angulus AXC. ergo X C ſectionem ſecat, ſecet in C: & à C ducatur C D ſectionem contingens, & C E perpendicularis. triangulum igitur C X E ſimile eſt triangulo G M K. quare ut quadratum X E ad quadratum E C, ita quadratum M K ad quadratum K G. eſt autem & ut tranſverſum figuræ latus ad rectum, ita rectangulum X E D ad quadratum E C, & rectangulum M K H ad quadratum K G: & convertendo, ut quadratum C E ad rectangulum X E D, ita quadratum K G ad rectangulum M K H. ex æquali igitur ut quadratum X E ad rectangulum X E D, ita quadratum M K ad rectangulum M K H: proptereaque ut X E ad E D, ita M K ad K H. ſed ut C E ad E X, ita erat G K ad K M. quare rurſus ex æquali ut C E ad E D, ita G K ad K H. & ſunt anguli, qui ad E, K, recti. angulus igitur ad D angulo G H K eſt æqualis.

O
8. quinti.
P
8. quinti.
Q



R
S
4.&22.ſexti.
T
V
6. ſexti.

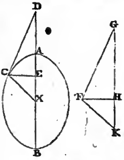
SIT ſectio ellipſis, cuius axis A B: & oporteat lineam ducere, quæ ſectionem contingat; & cum axe ad partes ſectionis faciat angulum, dato angulo acuto æqualem. Itaque factum ſit; & ſit linea C D. ergo angulus CDA eſt datus. & ducatur perpendicularis C E. proportio igitur quadrati D E ad quadratum E C data eſt. ſit ſectionis centrum X, & iungatur C X; erit proportio quadrati CE ad rectangulum D E X data: eadem enim eſt, quæ proportio recti lateris ad tranſverſum. ergo dabitur proportio quadrati D E ad rectangulum D E X; & iccirco proportio D E ad E X. proportio autem D E ad E C eſt data. data igitur & proportio C E ad E X. ſed angulus, qui ad E, rectus eſt. ergo datus angulus ad X; qui quidem eſt ad lineam poſitione datam, & ad datum punctum. quare datum erit punctum C. & linea C D à dato puncto ducitur, & ſectionem contingit. ergo poſitione data erit.



37. primi huius.
8. Dat.
41. Datorum.

COMPONETVR autem problema hoc modo. Sit datus angulus acutus F G H;

ſumaturque in linea F G punctum F; & F H perpendicularis ducatur: deinde fiat ut rectum latus ad tranſverſum, ita quadratum F H ad rectangulum G H K; & iungatur K F: ſit autem ſectionis centrum X; & angulo H K F æqualis angulus conſtituatur A X C; & ducatur C D ſectionem contingens. Dico lineam C D facere illud, quod proponebatur, videlicet angulum C D E angulo F G H æqualem eſſe. Quoniam enim ut X E ad E C, ita K H ad H F; erit ut quadratum X E ad quadratum E C, ita K H quadratũ ad ipſum H F. eſt autem & ut quadratum E C ad rectãgulum D E X, ita quadratum F H ad rectangulum G H K: utraque enim proportio eadem eſt, quæ recti lateris ad tranſverſum. quare ex æquali ut quadratum X E ad rectangulum X E D, ita quadratum K H ad rectangulum K H G. ergo ut linea X E ad E D, ita eſt K H ad H G. eſtque ut X E ad E C, ita K H ad H F. ex æquali igitur ut D E ad E C, ita G H ad H F. quòd cùm circa



6. ſext. rectos angulos latera proportionalia ſint; angulus C D E angulo F G H eſt æqualis. linea igitur C D facit illud, quod propoſitum fuerat.

F E D. C O M M A N D I N V S.

A QVARE data eſt proportio D B ad B C.] *Cùm enim anguli C D B, D B C dati ſint; erit & B C D reliquus ex duobus rectis datus. quare ex quadrageſima propoſitione libri Datorum Euclidis, triangulum D C B dabitur ſpecie: & propterea laterum ipſius proportio data erit.*

B Proportio igitur A B ad B C data erit.] *Ex octava propoſitione libri Datorum. utraque enim ipſarum A B, B C ad eandem D B proportionem habet datam.*

C Et datus angulus, qui ad B. ergo & B A C angulus eſt datus.] *Ex quadrageſima prima eiuſdẽ libri. datur nanque triangulum A B C ſpecie. ergo & reliqui ipſius anguli dabuntur.*

D Linea igitur C A poſitione dabitur.) *Ex vigeſima nona eiuſdem libri.*

E Angulus igitur F angulo D eſt æqualis.) *Ex ſexta ſexti elementorum.*

F Proportio autem quadrati C E ad quadratum E D eſt data; quòd datus ſit uterque angulorum C D E, D E C.] *Datus eſt enim angulus C D E, itemque D E C, qui eſt rectus. ergo & reliquus E C D. & triangulum D C E ſpecie dabitur, ex quadrageſima propoſitione Datorum. data eſt igitur proportio lateris C E ad E D: & iccirco ex quinquageſima eiuſdem, quadrati C E ad quadratum E D proportio data ſit, neceſſe eſt.*

G Quare & rectanguli X E D ad quadratum E D proportio data erit.] *Ex octava eiuſdem. data eſt enim utriuſque proportio ad quadratum E C.*

H Et iccirco proportio X E ad E D.] *Eadem nanque eſt, quæ rectanguli X E D ad quadratum E D, ex prima ſexti elementorũ, vel ex lemmate in vigeſimã ſecundã decimi.*

K Sed angulus, qui ad E, eſt datus. ergo & qui ad X.) *Quoniam enim proportio X E ad E D eſt data. & data proportio C E ad E D, ex iis, quæ ſupra dicta ſunt, erit ex octava Datorum X E ad E C proportio quoque data. & eſt datus angulus ad E rectus. ergo triangulum X E C ſpecie datur, ex quadrageſima eiuſdem: & propterea reliqui ipſius anguli dati erunt.*

L Ergo & X C poſitione dabitur.] *Ex vigeſima nona eiuſdem.*

M Ergo C D producta aſymptoto occurret.] *Ex tertia huius.*

N Erit F D E angulus angulo F X D maior.] *Ex decima ſexta primi elementorum.*

O Erit ut X A ad A F, ita H K ad K L.) *Ex quarta ſexti. ſequitur enim ex iam dictis triangulum F X A triangulo G H K ſimile eſſe.*

P Vt autem quadratum X A ad quadratum A F, ita tranſverſum figuræ latus ad rectum.] *Ex demonſtratis in prima huius.*

N

Ita-

Itaque quoniam quadratum M K maius eſt rectangulo M K H.) *Nam ex prima ſecundi quadratum M K æquale eſt rectangulo M K H, & rectangulo K M H.* Q

Et propterea angulus F X A angulo G M K maior erit.) *Hoc etiam ex ſexto lemmate Pappi manifeſtò conſtare poteſt: cùm M K ad K G maiorem habeat proportionem, quàm X A ad A F.* R

Ergo X C ſectionem ſecat.) *Ex ſecunda huius.* S

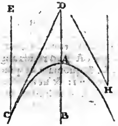
Eſt autem & ut tranſverſum latus ad rectum, ita rectangulum X E D ad quadratum C E.] *Ex trigeſima ſeptima primi huius.* T

Et rectangulum M K H ad quadratum K G.) *Ex ijs, quæ ſuperius oſtenſa ſunt. quare ſequitur, ex undecima quinti, rectangulum X E D ad quadratum E C ita eſſe, ut rectangulum M K H ad quadratum K G.* V

PROBLEMA VIII. PROPOSITIO LI.

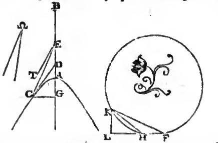
DATA ſectione coni, lineam contingentem ducere, quæ cum diametro per tactum ducta faciat angulum, dato angulo acuto æqualē.

SIT data coni ſectio primùm parabole, cuius axis A B; & datus angulus H. Itaque oportet ducere lineam, quæ parabolen contingat; & cum diametro, quæ per tactum ducitur, contineat angulum æqualem dato angulo H. Factum iam ſit; & linea contingens ſit C D: quæ quidem cum diametro E C per tactum ducta faciat angulum E C D, angulo H æqualem; & axi in puncto D occurrat. Quoniam igitur A D æquidiſtat E C; angulus A D C angulo E C D eſt æqualis. 46. primi huius. & datus eſt angulus E C D: eſt enim æqualis angulo 29. primi element. H. ergo & A D C angulus datus erit.



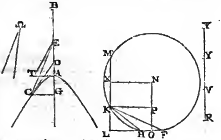
COMPONETVR autem hoc modo. Sit parabole, cuius axis A B; & datus angulus H. Ducatur linea C D ſectionem contingens, quæ cum axe faciat angulum C D A 30. huius. æqualem angulo H: & per C ducatur E C ipſi A B æquidiſtans. Itaque quoniam angulus H angulo A D C eſt æqualis. angulus autem A D C eſt æqualis angulo E C D. & H angulus angulo E C D æqualis erit.

SIT ſectio hyperbole, cuius axis A B, centrum E, & aſymptotos E T: datus autem angulus acutus ſit Ω; & linea C D ſectionem contingat; iungaturque C E
faciens illud, quod propoſitum eſt; & C G perpendicularis ducatur. Itaque pro- A
portio tranſverſi lateris ad rectum data eſt. quare & data proportio rectanguli E G B
D ad quadratum C G. exponatur
recta linea data F H; & in ipſa cir- C
culi portio deſcribatur, ſuſcipiens
angulum æqualem angulo Ω; quæ D
quidem portio ſemicirculo maior
erit: & ab aliquo puncto eorum,
quæ ſunt in circunferentia, videlicet à puncto K ducatur perpendicularis K L, faciens proportio- E
nem rectanguli F L H ad quadratum L K eandem, quæ eſt tranſverſi lateris ad rectum; & iun-
gantur F K, K H. quoniam igitur angulus F K H eſt æqualis angulo E C D: eſt F
autem ut tranſverſum latus ad rectum, ita & rectangulum E G D ad quadratum
C G; & rectangulum F L H ad quadratum K L. erit triangulum K F L triangulo G



H C G E ſimile; & triangulum F H K ſimile triangulo E D C. quare angulus K F H angulo C E D eſt æqualis.

COMPONETVR autem hoc modo. Sit data hyperbole A C, cuius axis
K A B, centrum E, & aſymptotos E T: datus autem angulus acutus ſit Ω; & data proportio tranſverſi lateris ad rectum ſit eadem, quæ lineæ Ψ R ad R V; &
33. tertii. Ψ V in Y biſariam ſecetur: deinde exponatur data recta linea F H; & in ipſa circuli portio maior ſemicirculo deſcribatur, quæ ſuſcipiat angulum æqualem angulo Ω; ſitque F K H: ſumatur autem circuli centrum N; à quo ad F H perpendicularis ducatur N O: & N O ſecetur in P; ita ut N P ad P O eandem habeat proportionem, quam Y V ad V R; & per P ipſi F H æquidiſtans ducatur P K; & à K ad F H productam perpendicularis K L ducatur: deinde iungantur F K, K H; pro-
28. primi. ducaturque L K ad M; & ab N ad K M ducatur N X perpendicularis. æquidiſtat
L igitur N X ipſi F H: proptereaque ut N P ad P O, hoc eſt Y V ad V R, ita X K ad
M K L; & antecedentium dupla, ut Ψ V ad V R, ita M K ad K L; componendoque ut Ψ R ad R V, ita M L ad L K.
lem. in 22. decimi. ſed ut M L ad L K, ita rectangulum M L K ad quadratum L K. ut igitur Ψ R ad R V, ita rectangulum M L K ad quadratum L K,
N hoc eſt rectangulum F L H ad L K quadratum. ut autem Ψ R ad R V, ita tranſverſum latus ad rectum. ergo ut rectangulum F L H ad quadratum L K, ita tranſverſum
O latus ad rectum. ducatur à puncto A linea A T ad rectos angulos ipſi



A B. & quoniam ut quadratum E A ad quadratum A T, ita eſt tranſverſum latus ad rectum: & ut tranſverſum latus ad rectum, ita rectangulum F L H ad quadra-
8. quinti. tum L K. quadratum autem F L ad L K quadratum maiorem proportionem habet,
P quàm rectangulum F L H ad quadratum L K. habebit quadratum F L ad quadratum L K maiorem proportionem, quàm quadratum E A ad quadratum A T. & ſunt anguli ad A, L recti. angulus igitur F angulo E minor erit. itaque conſtitua-
Q tur angulus A E C æqualis angulo L F K. ergo linea E C ſectioni occurret. occurrat in puncto C; & à C ducatur C D contingens ſectionem; & C G perpendicularis:
37. primi huius. erit ut tranſverſum latus ad rectum, ita rectangulum E G D ad quadratum C G. ut igitur rectangulum F L H ad quadratum L K, ita rectangulum E G D ad qua-
R S dratum C G: ideoque triangulum K F L triangulo C E G eſt ſimile; & triangulum K H L ſimile triangulo C D G; & K F H ipſi C E D. quare E C D angulus angulo
T F K H, hoc eſt ipſi Ω eſt æqualis. Si verò tranſverſi lateris ad rectum proportio ſit
V æqualis ad æquale; linea K L circulum F K H continget: & à centro ad K ducta æquidiſtans erit F H; & ipſa problema efficiet.

FED. COMMANDINVS.

A ITAQVE proportio tranſverſi lateris ad rectum data eſt.) *Quoniam enim poſitione data eſt E T aſymptotos: ſi à puncto A ducatur ad rectos angulos ipſi A E linea A T,*
29. Dator. *quæ aſymptoto in T occurrat; erit A T data. & data proportio E A ad A T. quare &*
1. 50. *proportio quadrati E A ad quadratum A T. hæc autem eadem eſt, quæ tranſverſi lateris ad rectum, ex demonſtratis in prima huius: quanquam data hyperbola, & latare eius tranſverſo, ſtatim tranſverſi lateris ad rectum proportio data erit abſque aſymptotis. ſunt enim aſymptoti recto latere quodammodo poſteriores.*

SIT hyperbole C A, cuius tranſverſum latus A B: & ſumpto in ſectione quovis puncto C,
30. Dator. *ducatur ad B A ordinatim linea C G. erit C G data; & data A G & G B. quoniam igitur*

data

data ſunt B G, G A; & earũ proportio dabitur, hoc eſt proportio rectanguli B A G ad quadratum G A. eſtque data C G. ergo & data proportio A G ad G C: & iccirco quadrati A G ad quadratũ C G. proportio igitur rectanguli B G A ad quadratum C G data erit, quæ eſt tranſverſi lateris ad rectum, ex vigeſima prima primi huius. lem. in 22. decimi. 50. 8. Datorum.

Quare & data proportio rectanguli E G D ad quadratum C G.) *Eadem enim eſt, quæ tranſverſi lateris ad rectum, ex trigeſima ſeptima primi huius.* B

Et in ipſa circuli portio deſcribatur, ſuſcipiens angulum æqualem angulo Ω.] C
Ex trigeſima tertia tertij elementorum.

Quæ quidem portio ſemicirculo maior erit.) *Ex trigeſima prima eiuſdem tertij.* D

Faciens proportionem rectanguli F L H ad quadratum L K eandem, quæ eſt E
tranſverſi lateris ad rectum.] *Quomodo hoc fiat, mox apparebit in problematis compoſitione.*

Eſt autem ut tranſverſum latus ad rectum, ita & rectangulum E G D ad quadratum C G; & rectangulum F L H ad quadratum K L.] *Quare ex undecima quinti ſequitur rectangulum F L H ad quadratum L K ita eſſe, ut rectangulum E G D ad quadratum G C. proportio autem rectanguli F L H ad quadratum L K componitur ex proportione F L ad L K & proportione H L ad L K: & proportio rectanguli E G D ad quadratum G C componitur ex proportione E G ad G C & D G ad G C. ergo proportio, compoſita ex proportionibus F L ad L K & H L ad L K, eadem eſt, quæ componitur ex proportionibus E G ad G C & D G ad G C.* F 23. ſexti.

Erit triangulum K F L triangulo C E G ſimile; & triangulum F H K ſimile triangulo E D C.) *Eſt enim F L ad L K, ut E G ad G C; quod poſtea demonſtrabimus. cum igitur circa æquales angulos L, G latera proportionalia ſint; triangulum F L K ſimile erit triangulo E G C. quare angulus ad F angulo ad E eſt æqualis; & angulus F K L angulo E C G. erat autem & F K H angulus æqualis angulo E C D. ergo & reliquus H K L reliquo D C G æqualis: & triangulum K F H ſimile triangulo C E D; itemque triangulum H K L triangulo D C G.* G 6 ſexti.

At verò F L ad L K ita eſſe, ut E G ad G C, hoc modo demonſtrabimus. Si enim fieri poteſt; ſit proportio F L ad L K maior, quàm E G ad G C: erit H L ad L K proportio minor, quàm D G ad G C: quoniam proportio, compoſita ex proportionibus F L ad L K & H L ad L K, eadem eſt, quæ componitur ex proportionibus E G ad G G & D G ad G C; quod ſupra oſtenſum eſt. itaque fiat, ut E G ad G C, ita M L ad L K. erit M L minor, quàm F L. rurſus fiat, ut H L ad L K, ita O G ad G C. eadem ratione minor erit O G, quàm D G. Quoniam igitur M L ad L K eandem habet proportionem, quàm E G ad G C. & ſunt anguli ad L, G recti inter ſe æquales. triangulum M L K triangulo E G C ſimile erit. rurſus quoniam O G ad G C eandem proportionem habet, quàm H L ad L K; erit & triangulum O G C ſimile ipſi H L K. angulus igitur E C G æqualis eſt angulo M K L. & angulus O C G æqualis angulo H K L. ergo reliquus E C O reliquo M K H æqualis erit; quod fieri non poteſt. ponebatur enim angulus E C D æqualis angulo F K H. & eſt angulus E C O maior angulo E C D. quare multò maior eſt angulo M K H. idem ſequetur abſurdum; ſi proportio F L ad L K ponatur minor, quàm E G ad G C. ex quibus conſtat F L ad L K eandem habere proportionem, quàm E G ad G C. 8. quinti.



Quare angulus K F L angulo C E D eſt æqualis.) *Hunc locum nos ita correximus. in Græco enim exemplari legebatur. ὥστε ἴση ἐστὶν ὑπὸ Z K Θ γωνία, τουτέστιν ἡ Ω τῇ ὑπὸ E Γ Δ, hoc eſt: Quare angulus F K H, videlicet angulus Ω angulo E C D eſt æqualis; & mendoſè, ut opinor. concluderet enim, quod antea poſuerat: eſſetque eadem concluſio in reſolutione & compoſitione problematis; quod eſt abſurdum.* H

Et aſymptotos E T.) *Hæc nos addidimus, quæ in Græco exemplari non erant: ſed tamen deſiderari videbantur.* K

Propterea que ut N P ad P O, hoc eſt ψ V ad V R, ita X K ad K L.) *Quoniam* L
enim

Digitized by Google

30.primi. *enim N X, P K æquidiſtant ipſi F H; & inter ſe æquidiſtabunt. æquidiſtant autem &*
28. *N O, X L; quòd utraque ad F H ſit perpendicularis. quare N P K X, P O L K parallelogramma ſunt: & ideo X K eſt æqualis N P, & K L ipſi P O.*
34.

M Et antecedentium dupla, ut ΨV ad V R, ita M K ad K L.] *Nam cùm ſit ut Y V ad V R, ita X K ad K L. ut autem ΨV ad Y V, ita M K ad X K: eſt enim & M K ipſius X K dupla; quoniam N X perpendicularis ad M K ipſam bifariam dividit, per tertiam propoſitionem tertij libri elementorũ. erit ex æquali ut ΨV ad V R, ita M K ad K L.*

N Hoc eſt rectangulum F L H ad L K quadratum.] *Rectangulum enim F L H eſt æquale rectangulo M L K; quòd utrunque ſit æquale quadrato eius lineæ, quæ ab L ducta circulum contingit, ex trigeſima ſexta tertij elementorum.*

O Ducatur à puncto A linea A T ad rectos angulos ipſi A B.) *Linea A T in puncto A ſectionem contingit; & aſymptoto occurrit in T. ergo quadratum E A ad quadratum A T eam proportionem habet, quam tranſverſum latus ad rectum, ex ijs, quæ in prima huius demonſtrantur,*

P Habebit quadratum F L ad quadratum L K maiorem proportionem, quàm quadratum E A ad quadratum A T. & ſunt anguli A, L recti. angulus igitur F angulo E minor erit.] *Quoniam enim quadratum F L ad quadratum L K maiorem proportionem habet, quàm quadratum E A ad quadratum A T; habebit linea F L ad L K maiorem proportionem, quàm E A ad A T. quare ex ſexto lemmate Pappi angulus F angulo E minor erit.*

Q Ergo linea B C ſectioni occurret.) *Ex ſecunda huius.*

R Ideoque triangulum K F L triangulo C E G eſt ſimile.] *Nam angulus C E G factus eſt æqualis angulo F. & angulus G rectus æqualis eſt recto L. ergo & reliquus reliquo æqualis erit: & triangulum K F L triangulo C E G ſimile.*

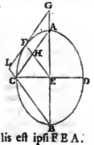
S Et triangulum K H L ſimile triangulo C D G; & K F H ipſi C E D.] *Conſtat hoc ex ſeptimo lemmate Pappi.*

T Si verò tranſverſi lateris ad rectum proportio ſit æqualis ad æquale.) *Hoc eſt ſi tranſverſum latus ſit æquale recto.*

V Linea K L circulum F K H continget: & à centro ad K ducta æquidiſtans erit F H.] *Si enim à centro N ad circunferentiam circuli ducatur linea N K, quæ ipſi F H æquidiſtet; & à K ad F H productam demittatur perpendicularis K L: linea K L circulum continget, ex decima ſexta propoſitione tertij elementorũ: quoniam & ad ipſam N K eſt perpendicularis.*

THEOREMA XLIV. PROPOSITIO LII.

SI ellipſim recta linea contingat: angulus, quem facit cum diametro per tactum ducta, non eſt minor angulo deinceps ei, qui lineis ad mediam ſectionem inclinatis continetur.



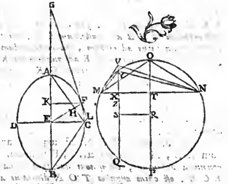
SIT ellipſis, cuius axes A B, C D, centrum E; & ſit axium maior A B: linea verò G F L ſectionem contingat; & iunctis A C, C B, F E, producatur B C ad L. Dico angulum L F E non eſſe minorem angulo L C A. Linea enim F E, vel eſt æquidiſtans ipſi L B, vel non æ-
2. ſexti. quidiſtans. Sit primùm æquidiſtans. & eſt A E æqualis E B. er-
5. huius go & A H ipſi H C eſt æqualis. ſed F E diameter eſt. linea igitur, quæ in F ſectionem contingit, ipſi A C eſt æquidiſtans. eſt
34. primi. autem & F E æquidiſtans L B. quare parallelogrammum eſt
A F H C L: & iccirco angulus L F H æqualis eſt angulo L C H. quo-
13. primi niam igitur utraque ipſarum A E, E B eſt maior E C; an-
huius. B gulus A C B eſt obtuſus. ergo acutus angulus L C H & L F E: & propterea G F E obtuſus erit. Sed non ſit E F æquidiſtans L B:
C & ducatur F K perpendicularis. non igitur angulus L B E æqualis eſt ipſi F E A.

rectus

Digitized by Google

rectus autem angulus ad E recto ad K eſt æqualis. ergo triangulum C B E non eſt ſimile triangulo F E K: & ideo non eſt ut quadratum B E ad quadratum E C, ita D quadratum E K ad quadratum K F. ſed ut quadratum B E ad quadratum E C, hoc eſt ut rectangulum A E B ad quadratum E C, ita tranſverſum latus ad rectum, & rectangulum G K E ad quadratum K F. ergo linea G K non eſt æqualis ipſi K E. exponatur circuli portio M Y N, ſuſcipiens angulum æqualem angulo A C B. angulus autem A C B eſt obtuſus. ergo circuli portio M Y N eſt ſemicirculo minor. 31. tertii. fiat igitur ut G K ad K E, ita N X ad X M; & per X ad rectos angulos ipſi M N ducatur Y X Q; & M Y, Y N iungantur: ſecetur autem M N bifariam in T; & E ad rectos angulos ducatur O T P. erit O T P diameter. ſit R circuli centrum, à quo perpendicularis ducatur R S; & iungantur M O, O N. itaque angulus M O N eſt F æqualis angulo A C B. & utraque ipſarum A B, M N in punctis E, T bifariã ſecatur: ſuntque anguli ad E, T recti. triangula igitur O T N, C E B inter ſe ſimilia erunt. ergo ut quadratũ N T ad quadratum T O, ita quadratum B E ad E C quadratum. & cùm T R ſit æqualis S X. & R O maior, quàm S Y. G habebit O R ad R T maiorem proportionem, quàm Y S ad S X. & 8. quinti. per converſionem rationis R O ad 30. quinti. O T minorem proportionem habebit, quàm S Y ad Y X: & antecedentium dupla P O ad O T minorem H habebit, quàm Q Y ad Y X; dividendoque P T ad T O minorem, quàm Q X ad X Y. ſed ut P T ad T O, ita 29. quinti. K quadratum N T ad quadratum T O, & quadratum B E ad quadratum E C, & tranſverſum latus ad rectum, & rectangulum G K E ad quadratum K F. ergo rectangulum G K E ad quadratum K F minorem habet proportionem, quàm Q X ad X Y, hoc eſt quàm rectangulum Q X Y ad quadratum X Y, hoc eſt rectangulum N X M ad quadratum X Y. ſi igitur fiat, ut rectangulum G K E ad quadratum K F, ita rectangulum N X M ad aliud quoddam; erit illud maius quadrato X Y. ſit quadratum X V. Itaque quoniam ut G K ad K E, ita N X ad X M. & L ſunt K F, X V ad rectos angulos: & ut rectangulum G K E ad quadratum K F, ita rectangulum N X M ad quadratum X V. erit angulus G F E æqualis angulo N V M. ergo maior eſt angulus N Y M, hoc eſt A C B angulo G F E. qui verò deinceps eſt, videlicet L F H eſt maior angulo L C H. non igitur angulus L F H angulo L C H minor erit.

lemm. 22. decimi. 35. tertii. 8. quinti.



FED. COMMANDINVS.

QVONIAM igitur utraque ipſarum A E, E B eſt maior E C; angulus A C B A eſt obtuſus.] *Si enim ex centro E, & intervallo E A deſcribatur circulus A Ω B; & producatur E C uſque ad eius circunferentiam in Ω; iunganturque A Ω, Ω B: erit angulus A Ω B rectus. quare A C B eſt obtuſus.* 31. tertii. 21. primi.

Ergo acutus angulus L C H & L F E: & propterea G F E obtuſus erit.) *Hoc icirco dixit, ut ex duobus angulis, quos diameter cum linea contingente efficit, acutum intelligamus, non obtuſum, qui eſt ex parte G. hac enim omnia ſequenti problemati inſervire perſpicuum eſt.* B

Non igitur angulus L B E æqualis eſt ipſi F E A.] *Quoniam enim linea B L, E F non ſunt æquidiſtantes: ſi producantur; convenient inter ſeſe; atque erit angulus F E K* C

exte-

exterior quolibet interiore & oppoſito maior, ex decima ſexta primi elementorum.

D Et ideo non eſt ut quadratum B E ad quadratum E C, ita quadratum E K ad quadratum K F.) *Græcus codex corruptus eſt, quem nos ita reſtituimus.* οὐκ ἄρα ἐστὶν ὡς τὸ ἀπὸ ΒΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ, τὸ ἀπὸ ΕΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΖ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ ΒΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ, τὸ ὑπὸ ΑΕΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΚ, καὶ ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, καὶ τὸ ὑπὸ ΗΚΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΖ. οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ΗΚ τῇ ΚΕ. *Sed tamen ante ea verba* (οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ΗΚ τῇ ΚΕ) *veriſimile eſt nonnulla deſiderari in hanc ſententiam: Non igitur eſt, ut rectangulum G K E ad quadratum K F, ita quadratum E K ad quadratum K F. quare rectangulum G K E quadrato K E non eſt æquale. Hæc autem magis perſpicua eſſent; ſi hoc modo explicaretur. Ergo triangulum C B E non eſt ſimile triangulo F E K: & ideo non eſt ut B E ad E C, ita E K ad K F; neque ut quadratum B E ad quadratum E C, ita quadratum E K ad quadratum K F. ſed ut quadratum B E ad quadratum E C, hoc eſt ut rectangulum A E B ad quadratum E C, ita tranſverſum latus ad rectum: & ut tranſverſum latus ad rectum, ita rectangulum G K E ad quadratum K F. non igitur ut rectangulum G K E ad quadratum K F, ita eſt quadratum E K ad quadratum K F. quare rectangulum G K E quadrato K E non eſt æquale. ut autem rectangulum G K E ad quadratum K E, ita linea G K ad K E. ergo linea G K non eſt æqualis ipſi K E.*

4. ſexti. 22 ſexti. 21. primi huius. 37. primi huius.

E Secetur autem M N bifariam in T.) *Non enim punctum X cadit in medio lineæ M N, quemadmodum neque K in medio G E: cum oſtenſum ſit G K non eſſe æqualem K E.*

F Itaque angulus M O N eſt æqualis angulo A C B: & utraque ipſarum A B, M N in punctis E, T bifariam ſecatur.) *Poſt ea verba deſiderari nonnulla videntur, cuiuſmodi hæc ſunt: quare angulus T O N eſt æqualis angulo E C B. eſt enim angulus T O N dimidius anguli M O N, & E C B dimidius ipſius A C B.*

G Et R O maior quàm S Y.) *Eſt enim linea O P maior quàm Y Q: & ut O P*
15. tertii. *ad Y Q, ita R O dimidia O P ad S Y dimidiam Y Q. ergo R O maior erit,*
15. quinti. *quàm S Y.*

H Et antecedentium dupla P O ad O T minorem habebit, quàm Q Y ad Y X.) *Fiat ut R O ad O T, ita S Y ad aliam, quæ ſit Y Z. erit Y Z maior, quàm Y X. ut autem*
8. quinti *P O ad R O, ita Q Y ad S Y. ex æquali igitur, ut P O ad O T, ita Q Y ad Y Z. ſed Q Y ad Y Z minorem habet proportionem, quàm ad Y X. ergo & P O ad O T minorem proportionem habebit, quàm Q Y ad Y X.*

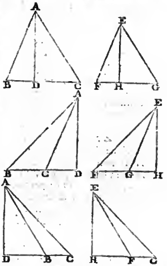
K Sed ut P T ad T O, ita quadratum T N ad quadratum T O.) *Ex corol-*
cor. 8. ſexti. *lario vigeſima ſexti. ſunt enim tres lineæ P T, T N, T O proportionales. ut*
21. primi huius. *autem quadratum T N ad quadratum T O, ita quadratum B E ad quadratum E C; hoc eſt rectangulum A E B ad quadratum E C, hoc eſt tranſverſum la-*
37. *tus ad rectum: & ut tranſverſum latus ad rectum, ita rectangulum G K E ad quadratum K F. ergo ut P T ad T O, ita rectangulum G K E ad quadratum K F, & propterea rectangulum G K E ad quadratum K F minorem proportionem habet, quàm Q X ad X Y.*

L Itaque quoniam ut G K ad K E, ita N X ad X M. & ſunt K F, X V ad rectos angulos: & ut rectangulum G K E ad quadratum K F, ita rectangulum N X M ad quadratum X V. erit angulus G F E æqualis angulo N V M.) *Illud verò nos hoc Lemmate demonſtrabimus: quoniam à Pappo demonſtratum eſſe non apparet.*

SINT triangula A B C, E F G: & ductis A D, E H perpendicularibus ad baſes B C, F G, ſit ut B D ad D C, ita F H ad H G: ſitque ut rectangulum B D C ad quadratum D A, ita F H G rectangulum ad quadratum H E.

Dico

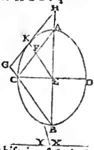
Dico triangulum E F H triangulo A B D ſimile eſſe: triangulumque E H G ſimile triangulo A D C, & triangulum E F G triangulo A B C. Quoniam enim eſt ut B D ad D C, ita F H ad H G. & ut B D ad D C, ita quadratum B D ad rectangulum B D C: ut autem F H ad H G, ita quadratum F H ad rectangulum F H G. ergo ut quadratum B D ad rectangulum B D C, ita quadratum F H ad rectangulum F H G. ſed ut rectangulum B D C ad quadratum D A, ita erat rectangulum F H G ad quadratum H E. ex æquali igitur ut quadratum B D ad quadratum D A, ita quadratum F H ad quadratum H E. quare ut linea B D ad D A, ita linea F H ad H E: & eadem ratione demonſtrabitur, ut linea C D ad D A, ita eſſe lineam G H ad H E. cùm igitur circa æquales angulos, videlicet circa rectos, qui ſunt ad D, H, latera proportionalia ſint; triangulum E H F ſimile erit triangulo A D B; & triangulum E H G triangulo A D C. quare angulus F E H æqualis eſt angulo B A D. & angulus H E G angulo D A C. angulus igitur F E G angulo B A C eſt æqualis. & eſt angulus E F G æqualis angulo A B C, & angulus E G F angulo A C B. ergo & triangulum E F G triangulo A B C ſimile erit. quod oportebat demonſtrare.



PROBLEMA IX. PROPOSITIO LIII.

DATA ellipſi, contingentem lineam ducere, quæ cum diametro per tactum ducta faciat angulum, dato angulo acuto æqualem: oportet autem acutum angulum datum non eſſe minorem angulo deinceps ei, qui lineis ad mediam ſectionem inclinatis continetur.

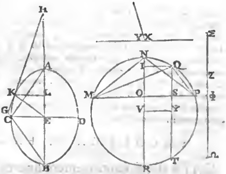
SIT data ellipſis, cuius maior axis A B, minor C D, & centrum E; & iungantur A C, C B: datus autem angulus ſit Y, non minor angulo A C G. quare & A
A C B angulus non eſt minor angulo X. ergo angulus Y vel eſt maior angulo A C G, vel ipſi æqualis. Sit primùm æqualis: & per E ducatur E K ipſi B C æquidiſtans; & per K contingens ſectionem K H. Quoniam igitur A E eſt æqualis E B. & ut A E ad E B, ita A F ad F C. erit A F ipſi F C æqualis. & 2. ſexti.
eſt K E diameter. ergo quæ in K ſectionem contingit, hoc eſt 5. huius.
H K G æquidiſtat ipſi A C. ſed & E K æquidiſtat B G. parallelogrammum igitur eſt K F C G: & ob id angulus G K E 34. primi.
angulo G C F æqualis. angulus autem G C F eſt æqualis angulo dato Y. ergo & G K E angulo Y æquale erit. Sit deinde angulus Y maior angulo A C G: erit contra angulus X minor A C B angulo. Exponatur circulus; & ab eo auferatur portio M N P, ſuſcipiens angulum æqualem angulo X: & M P bifariam ſecta in O,



R

& per

& per O ducatur N O R ad rectos angulos ipſi M P; & iungantur M N, N P. angulus igitur M N P minor eſt angulo A C B, anguli autem M N P dimidius eſt angulus M N O: & anguli A C B dimidius eſt A C E. ergo M N O angulus an-
B gulo A C E eſt minor. & qui ad E, O anguli recti ſunt. quare linea A E ad E C maiorem proportionem habet, quàm M O ad O N: & ideo quadratum A E ad E C quadratum maiorem habet proportionem, quàm quadratum M O ad quadratum O N. ſed quadratum A E æquale eſt rectangulo A E B; & quadratum M O æqua-
35. tertii. le rectangulo M O P, hoc eſt ipſi N O R. ergo rectangulum A E B ad quadratum
C C E C, hoc eſt tranſverſum latus ad rectum maiorem proportionem habet, quàm
lem. in 22. decimi. rectangulum N O R ad quadratum O N, hoc eſt quàm linea R O ad O N. fiat ut tranſverſum latus ad rectum, ita Ω Z ad Z Σ: & Ω Σ bifariã ſecetur in Φ. quoniam igi-
18. quinti apud Cã. tur tranſverſum latus ad rectum maiorem proportionem habet, quàm R O ad O N: habebit & Ω Z ad Z Σ maiorem proportionem, quàm R O ad O N; & componendo
D Ω Σ ad Σ Z maiorem habebit, quàm R N ad N O. ſit V circuli centrum. ergo Φ Σ
29. quinti apud Cã. ad Σ Z maiorem habet proportionem, quàm V N ad N O: dividendoque Φ Z ad Z Σ maiorem habet, quàm V O ad O N. fiat ut Φ Z ad Z Σ, ita V O ad minorem
E ipſa O N, hoc eſt ad O I: perque I ducatur I Q ipſi M P æquidiſtans; & ducatur Q S T æquidiſtans N R,
F & V Ψ æquidiſtans eidem M P. erit igitur ut Φ Z ad Z Σ, ita V O ad OI & Ψ S ad S Q: componendoque ut Φ Σ ad Σ Z, ita Ψ Q ad Q S; & antecedentium dupla ut Ω Σ ad Σ Z, ita T Q ad Q S; & dividendo ut Ω Z ad Z Σ, hoc eſt ut tranſverſum latus ad rectum, ita T S ad S Q. iungantur M Q, Q P: & ad lineam A E, & ad E punctum conſtituatur angulus A E K æqualis angulo M P Q: & per K ducatur K H ſectionem contingens; & K L ordinatim applicetur. Itaque quoniam angulus M P Q æqualis eſt angulo A E K. & rectus angulus, qui ad S, eſt æqualis recto, qui ad L. erit triangulum Q S P ſimile triangulo K L E. & ut tranſverſum latus ad re-



lẽ. 21. dec. ctum, ita eſt T S ad S Q, hoc eſt rectangulum T S Q ad quadratum Q S, hoc eſt
35. ter. G rectangulum M S P ad quadratum Q S. ſimile igitur eſt triangulum H L K triangulo M S Q; & triangulum H K E ſimile ipſi M Q P: & propterea angulus M Q P eſt æqualis angulo H K E. eſt autem M Q P angulus æqualis angulo M N P, hoc eſt angulo X. quare & H K E angulus angulo X eſt æqualis. angulus igitur deinceps G K E ei, qui deinceps eſt angulo Y, æqualis erit. ergo ducta eſt linea G H ſectionem contingens, quæ cum diametro K E per tactum ducta facit G K E angulum dato angulo Y æqualem. quod feciſſe oportebat.

FED. COMMANDINVS.

A DATVS autem angulus ſit Y non minor angulo A C G. quare & A C B angulus non eſt minor angulo X.] *Si enim angulus Y ſit æqualis angulo A C G; & angulus X angulo A C B æqualis erit: ſi verò Y angulo A C G ſit maior; erit X minor ipſo A C B. quare ſequitur angulum A C B non eſſe minorem angulo X.*

B Quare linea A E ad E C maiorem proportionem habet, quàm M O ad O N.) *Hoc in undecimo lemmate Pappi demonſtratur.*

Quàm

Quàm rectangulum N O R ad quadratum O N.) *Hæc nos appoſuimus, quæ in Græco exemplari deeſſe videbantur.* C

Ergo Φ Σ ad Σ Z maiorem habet proportionem, quàm V N ad N O.] *Quoniam enim Ω Σ ad Σ Z maiorem proportionem habet, quàm R N ad N O: & antecedentium dimidia Φ Σ ad Σ Z habebit maiorem proportionem, quàm V N ad N O.* D

Perque I ducatur I Q ipſi M P æquidiſtans: & ducatur Q S T æquidiſtans N R, & V Ψ æquidiſtans eidem M P.] *Hunc locum ita reſtituimus. nam in Græco exemplari, ut opinor, nonnulla deſunt.* E

Erit igitur ut Φ Z ad Z Σ, ita V O ad O I, & Ψ S ad S Q.] *Eſt enim Ψ S æqualis V O, & S Q æqualis O I; propterea quòd parallelogramma ſunt O V Ψ S, O I Q S.* F

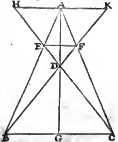
Simile igitur eſt triangulum H L K triangulo M S Q, & triangulum H K E ſimile ipſi M Q P.] *Hoc eodem modo demonſtrabitur, quo uſus eſt Pappus in ſeptimo lemmate. nam rectangulum H L E ad quadratum L K eſt, ut tranſverſum latus ad rectum, hoc eſt ut rectangulum M S P ad quadratum S Q.* G

SECVNDI LIBRI FINIS.

PAPPI ALEXANDRINI
LEMMATA IN TERTIUM LIBRUM CONICORUM APOLLONII.

LEMMA PRIMUM.

S*IT deſcripta figura A B C D E F G : & ſit B G æqualis G C . Dico E F ipſi B C æquidiſtantem eſſe .*



DVCATVR enim per A linea H K æquidiſtans B C: & B F, C E ad puncta H, K producãtur . Itaque quoniam B G eſt æqualis G C; erit
A & H A ipſi A K æqualis. er-
B go ut B C ad H A, hoc eſt
2. ſexti. ut B E ad E A, ita B C ad K A, hoc eſt C F ad F A. quare E F ipſi B C eſt æquidiſtans.

COMMENTARIVS.

A ERIT & H A ipſi A K æqualis .] *Ob ſimilitudinem triangulorum B D G, K D A; itemque triangulorum C D G, H D A. eſt enim ut B G ad G D, ita K A ad A D. & ut D G ad G C , ita D A ad A H. ex æquali igitur ut B G ad G C , ita K A ad A H: ſed B G eſt æqualis G C . ergo & K A ipſi A H æqualis erit .*

14. quinti. B Ergo ut B C ad H A , hoc eſt ut B E ad E A, ita B C ad K A, hoc eſt C F ad F A.] *Sunt enim triangula ſimilia B E C , A E H ; & triangula B F C, K F A itidem ſimilia .*

LEMMA II.

SINT triangula ABC , DEF , quæ angulos A, D æquales habeant: & ſit rectangulum B A C æquale rectangulo E D F. Dico triangulũ triangulo æquale eſſe.

4. ſexti. DVCTIS enim perpendicularibus B G, E H, erit ut B G ad B A, ita E H ad E D.
1. A ergo ut rectangulum ex B G & A C ad rectãgulum BAC, ita rectangulum ex E H & D F ad rectangulum EDF : & permutando ut rectangulum ex B G & A C ad rectangulum ex EH & DF, ita rectangulum BAC ad rectangulum E D F. eſt autem rectangulum B A C rectangulo E D F æquale . ergo & rectangu-



41. primi. lum ex B G & A C æquale rectangulo ex E H & D F. ſed rectanguli ex B G & A C dimi-

Digitized by Google

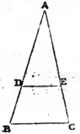
dimidium eſt A B C triangulum : & rectanguli ex E H & D F dimidium triangulum D E F. triangulum igitur A B C triangulo D E F æquale erit. Perſpicuum autem eſt & parallelogramma ipſorum dupla inter ſe æqualia eſſe.

COMMENTARIVS.

ERGO ut rectangulum ex B G & A C ad rectangulum B A C, ita rectangulum ex E H & D F ad rectangulum E D F.) *Ex prima ſexti, eſt enim rectangulum ex B G & A C ad rectangulum B A C, ut B G ad B A; quòd eandem altitudinem habeant, videlicet lineam A C: & ſimiliter rectangulum ex E H & D F ad rectangulum E D F, ut E H ad E D. quare ex undecima quinti ſequitur propoſitum.* A

LEMMA III.

SIT triangulum A B C: & ſit D E ipſi B C æquidiſtans. Dico ut quadratum A B ad quadratum A D, ita eſſe triangulum A B C ad triangulum A D E.

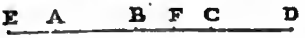


QVONIAM enim triangulum A B C ſimile eſt triangulo A D E; habebit A B C triangulum ad ipſum A D E duplam proportionem eius, quæ eſt B A ad A D. 19. ſexti. ſed & quadratum A B ad quadratum A D duplam proportionem habet eius, quæ eſt B A ad A D. 20. ſexti. ergo ut quadratum A B ad quadratum A D, ita erit A B C triangulum ad triangulum A D E. 11. quinti

LEMMA IV.

SINT lineæ A B, C D inter ſe æquales: & ſumatur quodvis punctum E. Dico rectangulum C E B ſuperare rectangulum C A B, rectangulo D E A.

SECETVR enim B C bifariam in F. Ergo punctum F lineam quoque A D bifariam ſecat. & quoniam rectangulum C E B unà cum B F quadrato æquale eſt quadrato E F: 6. ſecundi rectangulum autem D E A unà cum quadrato A F æquale eſt quadrato E F, atque eſt quadratum A F æquale rectangulo C A B unà cum B F quadrato: commune auferatur quadratum B F, A reliquum igitur rectangulum C E B æquale eſt rectangulo C A B unà cum rectangulo D E A. quare C E B rectangulum ſuperat rectangulum C A B, ipſo D E A rectangulo, quod demonſtrare oportebat.



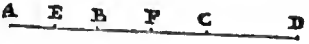
COMMENTARIVS.

COMMVNE auferatur quadratum B F.] *Sequitur enim ex iam dictis rectangulum C E B unà cum quadrato B F æquale eſſe rectangulis D E A, C A B unà cum quadrato B F.* A

LEM-

LEMMA V.

SI verò punctum E ſit inter A & B: rectangulum C E B minus eſt, quàm rectangulum C A B, eodem ipſo A ſpatio, videlicet rectangulo D E A; quod ſimili ratione demonſtrabitur.

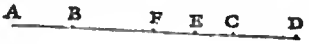


COMMENTARIVS.

6.sec. 5. A QVOD ſimili ratione demonſtrabitur.) *Eſt enim rectangulum C A B unà cum B F quadrato æquale quadrato A F. & rectangulum D E A unà cum quadrato E F æquale eſt quadrato A F: quadratum verò E F eſt æquale rectangulo C E B, unà cum B F quadrato. ergo rectangulum C A B unà cum quadrato B F æquale eſt rectangulis D E A, C E B unà cum quadrato B F. & dempto communi quadrato B F, relinquitur rectangulum C A B æquale rectangulis D E A, C E B. rectangulum igitur C E B minus eſt, quàm rectangulum C A B, rectangulo D E A.*

LEMMA VI.

QVOD ſi E punctum ſit inter B & C: eadem ratione rectangulum C E B minus eſt, quàm rectangulum A E D, rectangulo A B D.

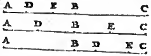


COMMENTARIVS.

5.ſecundi *NAM cùm rectangulum A E D unà cum quadrato E F æquale ſit quadrato A F. rectangulum verò A B D unà cum quadrato B F eidem quadrato A F ſit æquale; & quadratum B F æquale rectangulo C E B unà cum E F quadrato: dempto communi quadrato E F, ſequitur rectangulum A E D æquale eſſe rectangulo A B D unà cum rectangulo C E B. ergo C E B rectangulum minus eſt, quàm rectangulum A E D, rectangulo A B D. id quod demonſtrandum proponebatur.*

LEMMA VII.

SIT linea A B æqualis ipſi B C; & duo puncta D, E ſumantur. Dico quadratum A B quater ſumptum æquale eſſe rectangulo A D C bis unà cum rectangulo A E C bis, & quadratis D B, B E bis ſumptis.



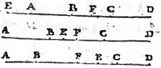
5. ſecundi HOC autem perſpicuum eſt. quadratum enim A B bis ſumptum propter bipartitas ſectiones æquale eſt rectangulo A D C bis, & quadrato D B bis: itemque quadratum A B bis eſt æquale rectangulo A E C bis, & bis E B quadrato:

LEMMA VIII.

SIT linea A B æqualis ipſi C D; & ſumatur punctum E. Dico quadrata

drata A E , E D æqualia eſſe quadratis B E , E C , & rectangulo A C D bis ſumpto .

SECETVR B C bifariam in F. Et quoniam quadratum D F bis ſumptum æquale eſt rectangulo A C D bis, & bis quadrato C F: appoſito communi quadrato E F bis, erit rectangulum A C D bis, unà cum quadratis C F, F E bis, æquale quadrate D F, F E bis ſumptis. ſed quadratis D F, F E bis ſumptis æqualia ſunt quadrata A E, E D. quadratis autem C F, F E 9.&10.ſecundi. bis ſumptis æqualia ſunt B E, E C quadrata. quadrata igitur A E, E D æqualia ſunt quadratis B E, E C, & rectangulo A C D bis ſumpto.



L E M M A IX.

SIT rectangulum B A C unà cum C D quadrato æquale quadrato A D. Dico C D ipſi D B æqualem eſſe.



COMMVNE enim auferatur quadratum C D; erit reliquum, quod continetur A C, D B, æquale rectangulo D C A. æqualis igitur eſt C D ipſi D B.

C O M M E N T A R I V S.

HOC lemma eſt veluti converſum ſextæ propoſitionis ſecundi libri elementorum: in cuius demonſtratione cùm non nulla deſiderari videantur; nos planiùs & apertiùs explicare tentabimus hoc modo.

Commune auferatur quadratum C D; erit reliquum rectangulum B A C æquale rectangulo D A C unà cum rectangulo D C A. eſt enim, ex ſecunda propoſitione ſecundi libri elementorum, quadratum A D æquale rectangulo D A C unà cum rectangulo A D C, hoc eſt unà cum rectangulo D C A & quadrato C D, ex tertia eiuſdem. ſed ex prima rectangulum B A C æquale eſt rectangulo D A C unà cum eo, quod B D & A C continetur. quare rurſus ablato communi rectangulo D A C, relinquitur rectangulum contentum B D & A C æquale rectangulo D C A. æqualis igitur eſt linea C D ipſi D B. 1. ſexti.

L E M M A X.

SIT rectangulum A C B unà cum quadrato C D æquale D B quadrato. Dico lineam A D æqualem eſſe D B.

PONATVR ipſi C D æqualis D E. Ergo rectangulum C B E unà cum quadrato D E, hoc eſt quadrato C D, æquale eſt D B quadrato, hoc eſt rectangulo A C B unà cum quadrato C D. quare rectangulum C B E eſt æquale rectangulo A C B: & propterea linea A C æqualis ipſi E B. ſed & C D æqualis eſt A 1. ſexti. D E. tota igitur A D toti D B eſt æqualis.



C O M M E N T A R I V S.

HOC lemma converſum eſt quintæ propoſitionis ſecundi libri elementorum:

Quare

Quare rectangulum C B E eſt æquale rectangulo A C B.] *Nempe ablato communi, videlicet C D quadrato.*

LEMMA XI.

SIT rurſus rectangulum B A C unà cum D B quadrato æquale quadrato A D. Dico lineam C D æqualem eſſe D B.

PONATVR enim ipſi D B æqualis A E. Et quoniam rectangulum B A C unà
A cum quadrato D B, hoc eſt cum quadrato E A æquale eſt quadrato A D. commune auferatur rectangulum D A C, ergo reliquum, quod B D & A C continetur, videlicet rectangulum E A C unà cum quadrato E A, quod
B eſt rectangulum C E A, æquale eſt ipſi A D C rectangulo. quare linea E A, hoc
C eſt B D ipſi D C eſt æqualis.



COMMENTARIUS.

A COMMVNE auferatur rectangulum D A C.] *Eſt enim rectangulum B A C*
1.ſecundi *æquale rectangulo D A C unà cum eo, quod B D & A C continetur; quadratum verò*
2.ſecundi *A D æquale rectangulo D A C unà cum rectangulo A D C.*

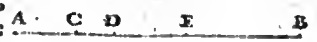
B Quod eſt rectangulum C E A.] *Ex tertia ſecundi libri elementorum.*

C Quare linea E A, hoc eſt B D ipſi D C eſt æqualis.] *Hoc nos demonſtravimus in commentarijs in ſextam decimam ſecundi huius.*

LEMMA XII.

SIT recta linea A B, in qua ſumantur tria puncta C, D, E; ita ut B E ſit æqualis E C, & rectangulum A E D æquale quadrato C E. Dico ut B A ad A C, ita eſſe B D ad D C.

A QVONIAM enim rectangulum A E D æquale eſt quadrato C E; erit
B ut A E ad E C, ita C E ad E D. quare per converſionem rationis, antecedentibuſque bis ſumptis, & dividendo ut B A ad A C, ita erit B D ad D C.



COMMENTARIUS.

HOC lemma, & quod ſequitur, in Græcis codicibus corruptiſſima erant; quæ nos ita reſtituimus.

A Erit ut A E ad E C, ita C E ad E D.) *Hæc nos addidimus perſpicuitatis cauſa. in Græco enim codice tantum legitur ἀνάλογον.*

B Quare per converſionem rationis, antecedentibuſque bis ſumptis, & dividendo ut B A ad A C, ita erit B D ad D C.) *Quoniam enim ut A E ad E C, ita C E ad E D; erit per converſionem rationis ut E A ad A C, ita E C ad C D; & antecedentium dupla, ut B A, A C ad C A, ita B C ad C D; eſt enim B C ipſius C E dupla; ergo dividendo ut B A ad A C, ita eſt B D ad D C.*

LEM-

L E M M A XIII.

SIT rurſus rectangulum B C D æquale quadrato C E, & A C ipſi C E æqualis. Dico rectangulum A B E æquale eſſe rectangulo C B D.

QVONIAM enim rectangulum B C D quadrato C E eſt æquale: ut B C ad C E, hoc eſt ad C A, ita erit C E, hoc eſt A C ad C D; & tota ad totam; & per A
conuerſionem rationis; & ſpatium ſpatio æquale. ergo rectangulum A B E æquale eſt C B D rectangulo. Sed illud etiam conſtat, rectangulum ſcilicet A D E ipſi B D C æquale eſſe. ſi enim à quadrato C E, & à rectangulo B C D auferatur commune quadratum C D; quæ relinquentur, æqualia erunt. B



C O M M E N T A R I V S.

ET tota ad totam; & per conuerſionem rationis; & ſpatium ſpatio æquale.] A
Quoniam enim eſt ut B C ad C A, ita A C ad C D: erit componendo, ut tota B A ad A C, hoc eſt ad totam E C, ita pars A D ad partem D C. ergo reliqua B D ad 19. quinti
reliquam D E, ut B A ad A C; & per conuerſionem rationis D B ad B E, ut A B ad B C. rectangulum igitur A B E rectangulo C B D eſt æquale. 16. ſexti.
Sed hoc etiam aliter demonſtrare poſſumus. Nam cùm linea A E bifariam ſecetur in 6. ſecundi
C; atque ipſi addatur E B: erit rectangulum A B E unà cum E C quadrato æquale quadrato C B. ſed eidem C B quadrato æqualia ſunt utraque rectangula C B D, B C D. 2.
rectangulum igitur A B E unà cum quadrato E C æquale eſt rectangulo C B D unà cum rectangulo B C D. quare ſublato quadrato E C ex altera parte, & ex altera rectangulo B C D, quæ inter ſe æqualia ſunt, ſequitur rectangulum A B E rectangulo C B D æquale eſſe.

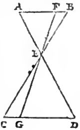
Sed illud etiam conſtat, rectangulum ſcilicet A D E ipſi B D C æquale eſſe.] B
Cùm enim A C ſit æqualis C E; rectangulum A D E unà cum C D quadrato æquale eſt 5. ſecundi
quadrato C E. ſed rectangulum B D C unà cum quadrato C D eſt æquale rectangulo 3.
B C D, hoc eſt quadrato C E. quare ſublato communi quadrato C D, relinquitur rectangulum A D E rectangulo B D C æquale.
Aliter quoque idem demonſtrari poteſt hoc pacto. Quoniam ut tota B A ad E C, ita eſt pars A D ad D C; erit & reliqua B D ad D E, ut A D ad D C: & propterea re- 16. ſexti.
ctangulum A D E æquale rectangulo B D C.

L E M M A XIV.

IN duas æquidiſtantes A B, C D per idem punctum E tres lineæ ducantur A E D, B E C, F E G. Dico ut rectangulum A E B ad rectangulum A F B, ita eſſe rectangulum C E D ad C G D rectangulum.

HOC per compoſitam proportionem manifeſtum eſt. ut enim A E ad E D, ita eſt A F ad D G; & ut B E ad E C, ita F B ad G C. & componuntur ex his proportionibus ſpatia. conſtat igitur propoſitum.

Sed licet & aliter demonſtrare abſque compoſita proportione hoc pacto. Quoniam enim ut A E ad E B, ita eſt D E ad E C; erit rectangulum A E B ad quadratum E B, ut rectangulum D E C ad quadratum E C. ut autem quadratum E B ad quadratum B F, ita quadratum E C ad C G quadratum. quare ex æquali ut rectangulum A E B ad quadratum B F, ita rectangulum D E C ad quadratum C G. ſed ut quadratum B F ad rectangulum B F A, ita quadratum C G ad rectangulum C G D. ex æquali igitur ut rectangulum A E B ad rectangulum A F B, ita rectangulum C E D ad rectangulum C G D.



COMMENTARIVS.

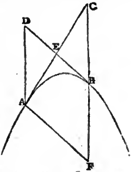
HOC per compoſitam proportionem manifeſtum eſt.] *Cùm enim lineæ A B, C D inter ſe æquidiſtent; erit A E F triangulum ſimile triangulo D E G, & triangulum F E B ſimile ipſi G E C. quare ut E A ad A F; ita E D ad D G; & ut E B ad B F, ita E C ad C G. proportio autem rectanguli A E B ad rectangulum A F B componitur ex proportione E A ad A F, & proportione E B ad B F: & proportio rectanguli C E D ad rectangulum C G D componitur ex proportione E D ad D G, & proportione E C ad C G. quare cùm proportiones, ex quibus componuntur, eædem ſint; ſequitur rectangulum A E B ad A F B rectangulum ita eſſe, ut rectangulum C E D ad rectangulum C G D.*

APOL-

APOLLONII PERGÆI
CONICORUM LIBER III.
CVM COMMENTARIIS EVTOCII ASCALONITÆ, ET FEDERICI COMMANDINI.

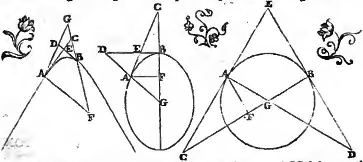
THEOREMA I. PROPOSITIO I.

SI coni ſectionem, vel circuli circunferentiã rectæ lineæ contingẽtes inter ſe cõueniant; & per tactus ducantur diametri, quæ contingẽtibus occurrant: triangula ad verticem facta ſibi æqualia erunt.



SIT coni ſectio, vel circuli circunferentia A B; quam contingant rectæ lineæ AC, BD conuenientes in puncto E: & per tactus A, B diametri ſectionis CB, DA ducantur, quæ contingentibus occurrant in punctis C, D Dico triangulũ ADE triangulo EBC æquale eſſe. Ducatur enim à puncto A linea AF ipſi BD æquidiſtans, quæ ordinatim applicata erit: & in parabola quidẽ parallelogrammum A B D F æquale erit triangulo A C F. quare ablato communi A E B F, triangulum A D E, quod relinquitur, æquale eſt triangulo C B E. A

IN alijs verò conueniant diametri in centro G. Et quoniam ordinatim applicata eſt AF, B
& AC ſectionẽ contingit: rectangulũ FGC æquale eſt quadrato BG. ut igitur FG ad GB, 14. ſexti



ita eſt BG ad GC. quare ut FG ad GC, ita quadratũ FG ad quadratũ GB. ſed ut quadratũ FG ad quadratum GB, ita triangulum AGF ad triangulũ DGB: & ut FG ad GC, ita C 20. 1. ſexti.

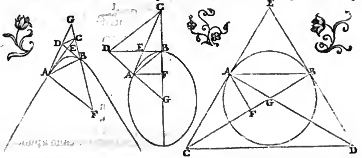
trian-

triangulum A G F ad triangulum A G C. ergo ut triangulum A G F ad triangu-
9. quinti. lum A G C, ita triangulum A G F ad triangulum D G B: & propterea triangulum
D A G C triangulo D G B eſt æquale. commune auferatur A G B E. reliquum igi-
tur triangulum A E D reliquo C E B æquale erit.

E V T O C I V S.

TERTIVS Conicorum liber, amiciſſime Anthemi, dignus ab antiquis exiſtimatus eſt, in quem multum ſtudij ac diligentiæ conferretur; id quod variæ ipſius editiones oſtendunt: ſed neque epiſtolam habet, quemadmodum alij libri; neque commentarios in ipſum docti alicuius viri ex ijs, qui ante nos fuerunt: quanquam in eo multa ſint contemplatione digniſſima, ut ipſe Apollonius in proœmio totius libri aſſerit. Omnia à nobis manifeſtè explicata ſunt, ac demonſtrata ex præcedentibus libris & commentarijs, quos in ipſos conſcripſimus. Invenitur etiam alia demonſtratio, in parabola quidem huiuſmodi.

E Quoniam A C ſectionem contingit, & ordinatim applicata eſt A F; erit & C B
34. primi. æqualis B F.& B F ipſi A D.ergo A D,C B inter ſe æquales ſunt.ſed & æquidiſtantes.
F triangulum igitur A D E æquale eſt,& ſimile triangulo E B C.) *In alijs verò hoc pacto.*
G H Iungantur A B,C D.Et quoniã ut F G ad G B,ita eſt B G ad G C.& ut F G ad G B,
ita AG ad G D:eſt enim AF ipſi D B æquidiſtans.ergo ut B G ad G C,ita AG adGD:
K L & propterea A B æquidiſtat ipſi C D.triangulum igitur A D C æquale eſt triangulo
M BDC:& communi CDE ablato,relinquitur triangulũ ADE triangulo CBE æquale



HOC theorema in parabola quidẽ,& hyperbola non habet caſus; in ellipſi verò,& circuli circunferentia duos habet: ſiquidẽ contingentes lineæ in tactibus duntaxat diametris occurrunt: & ipſis productis, vel occurrũt, ſicut in propoſita figura; vel ad alteras partes, in quibus eſt E, quẽadmodũ & in hyperbola.

FED. COMMANDINVS.

A ET in parabola quidem parallelogrammum A B D F æquale erit triangulo A C
F.] *Ex quadrageſima ſecunda primi huius.*

B Et quoniam ordinatim applicata eſt A F; & A C ſectionem contingit: rectangu-
lum F G C æquale eſt quadrato B G.] *Ex trigeſima ſeptima primi huius.*

C Sed ut quadratum F G ad quadratum G B, ita triangulum A G F ad triangu-
lum D G B.] *Ex tertio lemmate Pappi.*

D Commune auferatur A G B E.reliquum igitur triangulum A E D reliquo C EB
æquale erit.] *In ellipſi quidem & circuli circunferentia, ablato vel addito communi A G B E: ſed in hyperbola, ablato communi D E C G, ſequitur illud, quod propoſitum eſt, videlicet triangulum A E D triangulo B E C æquale eſſe.*

IN ALIAM DEMONSTRATIONEM, QVÆ AB EVTOCIO PONITVR.

E Erit & C B æqualis B F.] *Ex trigeſima quinta primi huius.*

F Triangulũ igitur A D E æquale eſt, & ſimile triangulo E B C.) *Eſt enim ex vige-
ſima*

ſima nona primi angulus D æqualis angulo B, & angulus A angulo C. ſuntque anguli ad verticem æquales. triangula igitur æqualia, & ſimilia erunt.

Et quoniam ut F G ad G B, ita eſt B G ad G C.) *Eſt enim rectangulum F G C æquale quadrato B G, ex trigeſima ſeptima primi huius.* G

Et ut F G ad G B, ita A G ad G D.) *Ex quarta ſexti; quòd triãgula A G F, D G H ſimilia ſunt.* H

Et propterea A B æquidiſtat ipſi C D.] *Nam cùm ſit A G ad G D, ut B G ad G C; erit permutando C G ad G D, ut B G ad G A, & ſunt circa eoſdē, vel æquales angulos latera proportionalia. ergo triangulũ C G D ſimile eſt triangulo B G A. & angulus G D C angulo G A B æqualis. linea igitur D C lineæ A B eſt æquidiſtans. Sed illud etiã poſſumus ex primo lemmate Pappi demonſtrare. iuncta enim G E lineam A B bifariam ſecabit, ex trigeſima ſecundi libri huius. quare & ipſam C D, ex demonſtratis in ſextam propoſitionem primi libri huius.* K 6. ſexti. 28. primi

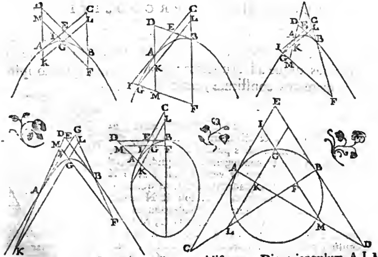
Triangulũ igitur A D C æquale eſt triangulo B D C.] *Ex trigeſima ſeptima primi Elementorum.* L

Et communi C D E ablato, relinquitur triangulum A D E triangulo C B E æquale.) *Verum eſt hoc in hyperbola quidem ſemper, in ellipſi verò & circuli circunferentia in uno tantùm caſu. nam in altero caſu ablato communi C G D, & communi A E B addito, ſequitur triangulum A D E æquale eſſe triangulo C B E.* M

THEOREMA II. PROPOSITIO II.

IISDEM poſitis, ſi in coni ſectione, vel circuli circunferentia ſumatur aliquod punctũ; & per ipſum æquidiſtantes contingẽtibus uſque ad diametros ducantur: quadrilaterum, factum ad unam contingentium & ad unam diametrorum, æquale erit triangulo, quod ad eandem contingentem, & ad alteram diametrum conſtituitur.

SIT coni ſectio, vel circuli circunferentia A B, quam contingant rectæ lineæ A E C, B E D; & diametri ſint A D, B C: ſumpto autem in ſectione puncto G, du-

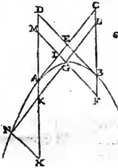


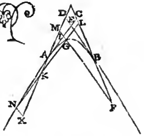
cantur G K L, G M F contingentibus æquidiſtantes. Dico triangulum A I M æquale eſſe quadrilatero C L G I. Quoniam enim oſtenſum eſt G K M triangulum æqua-

æquale quadrilatero A L; commune apponatur, vel auferatur quadrilaterum I K. ergo triangulum A I M quadrilatero C G eſt æquale.

EVTOCIVS.

CASVS huius theorematis invenientur per quadrageſimum ſecundum & quadrageſimum tertium theorema primi libri, & per commentarios, quos in ea conſcripſimus. Oportet autem ſcire, ſi punctum G inter AB ſumatur; ita ut æquidiſtantes ſint DEB, MFG, itemque AEC, KGL; & protrahatur LK uſque ad ſectionem in N; & per N ducatur NX ipſi BD æquidiſtans: ex ijs, quæ tradita ſunt in theoremate quadrageſimo nono, & quinquageſimo primi libri, & in ipſis commentarijs, erit triangulum KNX æquale quadrilatero KC. ſed triangulum KNX ſimile eſt triangulo KGM; cum MG æquidiſtans ſit NX. eſt autem & æquale: quoniam linea contingens eſt AC, cui æquidiſtat GN; & diameter eſt MX, & NK æqualis KG. quoniam igitur triangulum KNX æquale eſt quadrilatero KC, & triangulo KGM; communi ablato AG, reliquum triangulum AIM reliquo CG quadrilatero æquale erit.

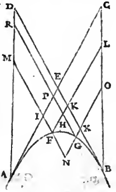




THEOREMA III. PROPOSITIO III.

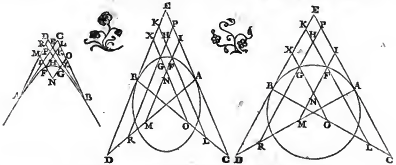
IISDEM poſitis, ſi in coni ſectione, vel circuli circunferentia duo puncta ſumantur; & per ipſa ducantur æquidiſtantes contingentibus uſque ad diametros: quadrilatera, quæ ab ipſis fiunt in diametris conſtituta, inter ſe æqualia erunt.

SIT coni ſectio, vel circuli circunferentia; lineæque contingentes & diametri, ſicut dictum eſt: & ſumptis in ſectione duobus punctis F, G, ducantur per F quidem lineæ contingentibus æquidiſtantes F H K L, N F I M; per G verò ducantur N G X O, G H P R. Dico quadrilaterum L G quadrilatero M H, & quadrilaterum L N ipſi R N æquale eſſe. Quoniam enim antea demonſtratum eſt triangulum R P A æquale quadrilatero G C, & triangulum A I M quadrilatero C F. eſt autem A R P triangulum maius, quàm triangulum A M I, quadrilatero P M. erit & quadrilaterum C G maius, quàm C F, eodem P M quadrilatero: & propte-



rea

rea quadrilaterum C G æquale eſt quadrilateris C F, P M, hoc eſt ipſis C H, R F. commune auferatur C H. reliquum igitur quadrilaterum L G



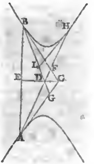
æquale eſt reliquo H M. quare & totum L N toti R N æquale erit.

EVTOCIVS.

HOC theorema plures caſus habet, quos ut in antecedēte inveniemus: ſed animadvertendum eſt duo puncta, quæ ſumuntur, vel eſſe inter duas diametros, vel extra & ad eaſdem partes. nam ſi alterum quidem extra ſumatur, alterum verò inter diametros; non conſtituentur quadrilatera, de quibus in propoſitione dictum eſt: ſed neque ad utraſque diametrorum partes conſtituentur.

THEOREMA IV. PROPOSITIO IV.

SI oppoſitas ſectiones duæ rectæ lineæ contingentes inter ſe conveniant; & per tactus ducantur diametri contingentibus occurrentes: triangula, quæ ad contingentes conſtituuntur, ſibi ipſis æqualia erunt.



SINT oppoſitæ ſectiones A, B; quas contingant rectæ lineæ A C, B C, in puncto C convenientes; ſitque ſectionum centrum D:& iunctis A B,C D,producatur C D uſque ad E: iungantur etiam A D, B D; & ad F, G producantur. Dico triangulum A G D æquale eſſe triangulo B D F; & A C F triangulum triangulo B C G. Ducatur enim per H contingens ſectionem H L, quæ ipſi A G æquidiſtabit. Et quoniam A D æqualis eſt D H; erit A G D triangulum æquale triangulo H L D. ſed & triangulum D H L æquale eſt triangulo B D F. ergo & triangulum A G D triangulo B D F: & propterea triangulum A C F ipſi B C G eſt æquale.

EVTOCIVS.

IN propoſitione huius theorematis & eorum, quæ ſequuntur, oportet ſcire, Apollonium indeterminatè dicere oppoſitas ſectiones. & nonnulli quidem codices habent duas contingentes in una ſectione: nonnulli verò non duas contingentes in una, ſed ſingulas in

prop. 32. *in utraque ſectione contingentes, quæ inter ſe conveniunt (uti dictum eſt in ſecundo libro) in angulo, qui deinceps eſt angulo aſymptoton: & ita eveniunt ea, quæ in propoſitione dicuntur. Licet autem ijs, qui volunt, hoc ex deſcriptionibus conſiderare: quanquam ſi unam quidem ſectionum duæ rectæ lineæ contingant; quæ per punctum, in quo conveniunt, & per centrum ducitur linea, tranſverſa diameter eſt: ſi verò utranque ſectionem ſingula linea contingant; quæ per dictum punctum & centrum ducitur, recta eſt diameter oppoſitarum ſectionum.*

FED. COMMANDINVS.

A Quæ ipſi A G æquidiſtabit.] *Ex ijs, quæ ab Eutocio demonſtrata ſunt in quadrageſimam quartam primi huius.*

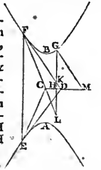
B Et quoniam A D eſt æqualis D H.] *Ex trigeſima primi huius.*

C Erit A G D triangulum æquale triangulo H L D] *Nam cùm lineæ A G, H L*
29. primi. *inter ſe æquidiſtent; erit angulus A G D æqualis angulo H L D; & anguli, qui ad D, æqua-*
21 *les ſunt. quare & reliquus æqualis reliquo, & triangulum triangulo ſimile. ut igitur A D ad D H, ita G D ad D L, & A G ad H L. ſed A D eſt æqualis D H. ergo & G D æqualis D L, & A G ipſi H L: & icciro triangulum A G D triangulo H L D æquale erit.*

D Sed triangulum D H L æquale eſt triangulo B D F.] *Demonſtratum eſt hoc in prima propoſitione huius libri.*

THEOREMA V. PROPOSITIO V.

SI oppoſitas ſectiones duæ rectæ lineæ contingentes ſibi ipſis occurrant; & in quavis ſectione aliquod punctum ſumatur, à quo ducantur duæ lineæ, una quidem contingenti æquidiſtans, altera verò æquidiſtans ei, quæ tactus coniungit: triangulum, quod ab ipſis conſtituitur ad diametrum per occurſum ductam, à triangulo, quod eſt ad occurſum contingentium, differt, triangulo facto ad contingentem & ad diametrum, quæ per tactum ducta fuerit.



SINT oppoſitæ ſectiones A, B; quarum centrum C, & lineæ contingentes ſint E D, D F, quæ fibi ipſis occurrant in D; iunctaque E F & C D, ac producta, iungantur F C, E C, & producantur: in ſectione autem ſumatur aliquod punctum G; per quod ducatur G K H L æquidiſtans E F, & G M æquidiſtans D F. Dico triangulum G H M à triangu-
A lo H K D differre, triangulo K L F. Quoniam enim oſtenſa eſt C D diameter oppoſitarum ſectionum; & E F ad ipſam ordinatim applicatur; & G K H L quidem ducitur æquidi-
B ſtans E F, M G verò æquidiſtans D F: triangulum M G H à triangulo C L H differt, triangulo C D F. quare M G H triangulum à triangulo K H D differt, triangulo K F L.

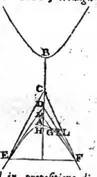
CONSTAT igitur triangulum K F L quadrilatero M G K D æquale eſſe.

EVTOCIVS.

QVINTVM theorema manifeſtum eſt: verùm in figura, quæ unam diametrum habet

habet, videlicet rectam, ita dicemus. Quoniam oſtenſum eſt triangulum GHM maius eſſe, quàm triangulum CLH, triangulo CDF; erit triangulum GHM triangulo CHL, & triangulo CDF æquale. ergo & æquale triangulo KDH unà cum triangulo FLK triangulum igitur GMH à triangulo KDH differt, triangulo KLF. commune auferatur triangulum HDK. quare reliquum KLF triangulum æquale eſt quadrilatero KDMG.

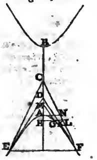
IN figura verò, quæ tranſverſum diametrum habet, hoc modo. Quoniam prius demonſtratum eſt CLH triangulum maius eſſe, quàm triangulum MHG, triangulo CDF; erit CHL triangulum æquale triangulo HGM unà cum triangulo CFD. commune auferatur quadrilaterum CDKL. reliquum igitur KHD triangulum æquale eſt triangulo HGM unà cum triangulo KLF. rurſus commune auferatur MHG. ergo triangulum KFL, quod relinquitur, quadrilatero GMDK æquale erit. Caſus habet plures, quos ex demonſtratis in quadrageſimo, & quadrageſimo quinto theoremate primi libri addiſcere oportet. Cùm autem dicitur, auferatur vel apponatur quadrilaterum vel triangulum; ablationes & appoſitiones iuxta proprietatem caſuum faciemus. Sed quoniam ea, quæ ſequuntur, plures caſus continent ob punctorum ſumptiones & æquidiſtantes lineas: ne confuſionem legentibus afferamus multas figuras deſcribentes, unam in ſingulis theorematibus faciemus, quæ oppoſitas ſectiones & diametros & lineas contingentes habeat; ut ſervetur illud, quod in propoſitione dictum eſt. His poſitis, & lineas æquidiſtantes, quouſque alijs occurrant, ducemus, in occurſu elementa collocantes, ita ut unuſquiſque ſervans ea, quæ conſequuntur, facilè poſſit caſus omnes demonſtrare.



FED. COMMANDINVS.

QVONIAM enim oſtenſa eſt CD diameter oppoſitarum ſectionum.] *Nam in primo caſu, cùm ſcilicet duæ lineæ contingunt utranque ſectionem, erit CD diameter recta; quod elicitur ex trigeſima octava & trigeſima nona ſecundi libri huius: in ſecundo autem caſu quando duæ lineæ alteram tantùm ſectionem contingunt, diameter erit tranſverſa; quod apparet ex vigeſima nona & trigeſima eiuſdẽ* A

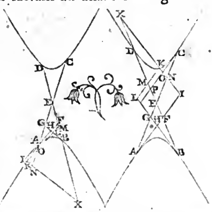
Triangulum MGH à triangulo CLH differt, triangulo CDF.] *Conſtat hoc in primo caſu ex quadrageſima quinta primi huius. ſed in altero caſu hoc modo demonſtrabitur. Iiſdem enim manentibus, quæ in figura, à vertice ſectionis linea AN ordinatim applicetur, quæ ipſam FC in puncto N ſecet. triangulum igitur MGH à triangulo CLH differt, triangulo CNA, ex quadrageſima tertia primi huius. ſed triangulum CDF triangulo CNA eſt æquale, ut oſtenſum eſt in quadrageſima tertia primi libri huius, in ſecunda demonſtratione, quæ ab Eutocio conſcribitur. ergo triangulum MGH à triangulo CLH differt, triangulo CDF.* B



THEOREMA VI. PROPOSITIO VI

IISDEM poſitis, ſi in una oppoſitarum ſectionum aliquod punctum ſumatur; & ab eo ducantur rectæ lineæ, contingentibus æquidiſtantes, quæ & contingentibus & diametris occur-

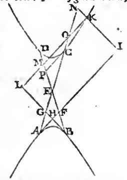
rant: quadrilaterum, ab ipſis factum ad unam contingentium & ad unam diametrorum, æquale erit triangulo, quod ad eandem contingentem & ad alteram diametrum conſtituitur.



SINT oppoſitæ ſectiones, quarum diametri A E C, B E D; & ſectionem A B contingant rectæ lineæ A F, B G convenientes inter ſe in puncto H: ſumatur autem aliquod punctum K in ſectione; à quo æquidiſtantes contingentibus ducantur K L M, K N X. Dico quadrilaterum K F æquale eſſe triangulo A I N. Quoniam enim oppoſitæ ſectiones ſunt A B, C D; & ſectionem A B contingit recta linea A F, ipſi B D occurrens; & ducta eſt K L æquidiſtans A F: triangulum A I N quadrilatero K F æquale erit.

FED. COMMANDINVS.

TRIANGVLVM A I N quadrilatero K F æquale erit.] *In figura enim, qua hic apponi ſolet, videlicet habente punctum K in ſectione A B [quanquam ad ſecundam propoſitionem huius magis pertinere videatur] ſit punctum O, ubi linea K M diametrum A C ſecat. ergo ex iis, qua demonſtrata ſunt in quinquageſima primi, vel ex ſecunda huius, triangulum K O N aquale eſt quadrilatero A O M F; & appoſito communi A I K O, triangulum A I N quadrilatero K F eſt aquale. In prima vero earum, quas nos addidimus, qua ſcilicet punctum K in ſectione C D habet inter C & D, ducatur C O P ſectionem contingens: erit triangulum C O N aquale quadrilatero K P; & appoſito communi O E, triangulum C P E, hoc eſt triangulum B G E, hoc eſt A F E aquale quadrilatero K E. rurſus apponatur commune E I. triangulum igitur A I N quadrilatero K F aquale erit. ſed in ſecunda figura, qua punctum K habet in ſectione D C extra C: triangulum K O N aquale eſt quadrilatero O P. & triangulum A E F aquale triangulo C P E. ergo communi F E O K I appoſito, erit triangulum A I N quadrilatero K F aquale.*



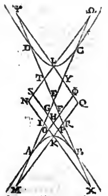
2. huius.
4. huius.
1. huius.

THEOREMA VII. PROPOSITIO VII.

IISDEM poſitis, ſi in utraque ſectione aliqua puncta ſumantur; & ab ipſis ducantur lineæ contingentibus æquidiſtantes, quæ & contingentibus & diametris occurrant: quadrilatera, à lineis ductis conſtituta ad diametros, inter ſe æqualia erunt.

Ponan-

PONANTVR enim eadem, quæ ſupra: & in utraque ſectione puncta K, L ſumantur; per quæ ducantur M K P R Q, N S T L Ω ipſi A F æquidiſtantes; N I O K X, Q Φ Y L Ψ æquidiſtantes B G. Dico ea evenire, quæ in propoſitione dicta ſunt. Nam cùm triangulum A O I quadrilatero R O æquale ſit: commune apponatur E O; erit totum triangulum A E F æquale quadrilatero K E. eſt autem B G E triangulum quadrilatero L E æquale, & triangulum A E F triangulo B G E. ergo & quadrilaterum L E æquale eſt quadrilatero I K R E. commune apponatur N E. totum igitur T K toti I L, & K Y ipſi R L æquale erit. 2.huius.



FED. COMMANDINVS.

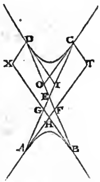
EST autem & B G E triangulum quadrilatero L E æquale.] *Hoc nos demonſtravimus in antecedente: ſed cùm triangulum A F E ſit æquale quadrilatero L E, quod etiam demonſtravimus; fortaſſe licebit illud, quod propoſitum eſt, expeditius oſtendere abſque triangulo B G E. Quoniam enim triangulum A E F æquale eſt quadrilatero K E. & eſt æquale quadrilatero L E. erit & quadrilaterum L E ipſi K E æquale: & communi appoſito N E, totum T K toti I L, & totum K Y toti R L æquale erit.*

THEOREMA VIII. PROPOSITIO VIII.

IISDEM poſitis, pro punctis K, L ſumantur C, D; in quibus diametri cum ſectionibus conveniant: & per ipſa contingentibus æquidiſtantes ducantur. Dico D G quadrilaterum quadrilatero F C, & quadrilaterum X I quadrilatero T O æquale eſſe.

QVONIAM enim triangulum A G H oſtenſum eſt æquale triangulo B H F. & linea, quæ à puncto A ducitur ad B, æquidiſtat lineæ à puncto G ad F ductæ. erit ut A E ad E G, ita B E ad E F: & per converſionem rationis ut E A ad A G, ita E B ad B F. eſt autem ut C A ad A E, ita D B ad B E: utraque enim utriuſque eſt dupla. ergo ex æquali ut C A ad A G, ita D B ad B F. & ſunt triangula ſimilia propter lineas æquidiſtantes. ut igitur C T A triangulum ad triangulum A H G, ita triangulum X D B ad triangulum B H F: & permutando. triangulum autem A H G æquale eſt triangulo B H F. ergo & C T A triangulum triangulo X D B eſt æquale. quorum triangulum A H G æquale eſt triangulo B H F, ut oſtenſum eſt. reliquum igitur quadrilaterum D H eſt æquale quadrilatero C H: & propterea quadrilaterum D G quadrilatero C F. Itaque quoniam C O æquidiſtat A F; triangulum C O E æquale eſt triangulo A F E: ſimiliter autem & triangulum D E I triangulo B E G. ſed B E G triangulum triangulo A E F eſt æquale. ergo & triangulum C O E triangulo D I E. eſtque G D quadrilaterum æquale quadrilatero F C. totum igitur X I toti O T æquale erit.

A
B
4. ſexti.
C
D
E



FED. COMMANDINVS.

A QVONIAM enim triangulum A G H oſtenſum eſt æquale triangulo B H F.] *In prima huius.*

B Et linea, quæ à puncto A ducitur ad B, æquidiſtat lineæ à puncto G ad F ductæ.] *Hoc ex primo lemmate Pappi apparere poteſt.*

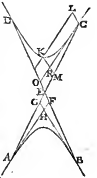
C Vt igitur C T A triangulum ad triangulum A H G, ita triangulum X D B ad triangulum B H F.] *Quoniam enim ut C A ad A G, ita eſt D B ad B F; erit ut quadratum C A ad quadratum A G, ita quadratum D B ad quadratum B F. ut autem quadratum C A ad quadratum A G, ita triangulum C T A ad triangulum G H A; quod triangula ſimilia ſint: & eadem ratione ut quadratum D B ad quadratum B F, ita triangulum X D B ad triangulum H F B, ex tertio lemmate Pappi, ergo ut C T A triangulum ad triangulum G H A. ita triangulum X D B ad triangulum H B F.*

D Itaque quoniam C O æquidiſtat A F; triangulum C O E æquale eſt triangulo A F E.] *Sunt enim triangula C O E, A F E ſimilia. & eſt A E æqualis E C. quare ſequitur, ut & alia latera: & iccirco ipſa triangula inter ſe æqualia ſint.*

E Sed B E G triangulū triangulo A E F eſt æquale.) *Oſtenſum eſt hoc in prima huius.*

THEOREMA IX. PROPOSITIO IX.

IISDEM poſitis, ſi alterum quidem punctum ſit inter diametros, ut K; alterum verò ſit idem, quod unum punctorum C, D, ut C: & æquidiſtantes ducantur. Dico triangulum C E O æquale eſſe quadrilatero K E, & quadrilaterum L O æquale ipſi L M.



A ILLVD verò perſpicuè apparet. nam cùm demonſtratum
B ſit C E O triangulum æquale triangulo A E F. triangulumque A E F æquale quadrilatero K E. & triangulum C E O
C quadrilatero K E æquale erit. ergo & triangulum C R M
D quadrilatero K O, & quadrilaterum L M quadrilatero L O eſt æquale.

FED. COMMANDINVS.

A NAM cùm demonſtratum ſit C E O triangulum æquale triangulo A E F.] *In quarta huius,*

B Triangulumque A E F æquale quadrilatero K E.] *Hoc nos ſupra demonſtravimus in ſextam huius.*

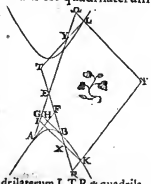
C Ergo & triangulum C R M quadrilatero K O.] *Ablato nimirum communi quadrilatero O M. Atqui hoc prius per ſe patet ex ſecunda huius. linea enim C O ſectionem contingit: ex quo contra ſequitur, appoſito communi O M, triangulum C E O quadrilatero K E æquale eſſe.*

D Et quadrilaterum L M quadrilatero L O eſt æquale.] *Nam cùm triangulū C R M æquale ſit quadrilatero K O; communi appoſito L R, erit L M quadrilaterū quadrilatero L O æquale.*

THEOREMA X. PROPOSITIO X.

IISDEM poſitis, ſumantur K, L non in punctis, in quibus diametri

metri ſectionibus occurrunt : demonſtrandum eſt quadrilaterum L T R Ψ quadrilatero Ω Ψ K I æquale eſſe.



QVONIAM enim rectæ lineæ A F, B G ſectionem contingunt ; & per tactus diametri A E, B E ducuntur ; & ſunt L T, K I contingentibus æquidiſtantes: triangulum T Y E maius eſt, quàm triangulum Y Ω L, triangulo E F A ; A
ſimiliter & triangulum X E I maius eſt, quàm triangulum X R K, triangulo B E G. ſed triangulum A E F æquale eſt triangulo B E G. B
quare eodem exceſſu & triangulum T Y E excedit triangulum Y Ω L, & triangulum X E I excedit ipſum X R K. triangulum igitur T Y E unà cum triangulo X R K æquale eſt triangulo X E I unà cum triangulo Y Ω L. C
commune apponatur K X E Y L Ψ. ergo quadrilaterum L T R Ψ quadrilatero Ω Ψ K I eſt æquale.

FED. COMMANDINVS.

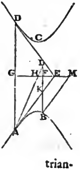
TRIANGVLVM T Y E maius eſt, quàm triangulum Y Ω L, triangulo E F A.) A *Ex quadrageſima tertia primi huius.*

Sed triangulum A E F æquale eſt triangulo B E G.) *Ex prima huius.* B

Triangulum igitur T Y E unà cum triangulo X R K æquale eſt triangu- C lo X E I unà cum triangulo Y Ω L.) *Hoc demonſtravit Eutocius in commentarijs in quadrageſimam octavam ſecundi huius.*

THEOREMA XI. PROPOSITIO XI.

IISDEM poſitis, ſi in quavis ſectione punctum ſumatur ; & ab ipſo lineæ æquidiſtantes ducantur ; una quidem contingenti æquidiſtans ; altera verò æquidiſtans ei, quæ tactus coniungit : triangulum, quod ab ipſis fit ad diametrum per occurſum contingentium ductam, à triangulo, contento linea contingente & diametro per tactum, differt triangulo, quod ad contingentium occurſum conſtituitur.



SINT ſectiones oppoſitæ A B, C D ; & lineæ contingentes A E, D E, quæ in puncto E ſibi ipſis occurrant : ſit autem centrum H ; iungaturque A D & E H G ; & ſumpto in ſectione A B quovis puncto B, ducatur B F L quidem ipſi A G æquidiſtans, B M verò æquidiſtans A E. Dico triangulum B F M à triangulo A K L differre, triangulo K E F. Lineam enim A D ab ipſa E H bifariam ſecari perſpicuum eſt. & E H diametrum eſſe coniugatam ei, quæ per H ducta ipſi A D æquidiſtat. quare A G applicata eſt ad E G. Quoniam igitur G E diameter eſt ; lineaque A E ſectionem contingit, & applicata eſt A G ; ſumpto autem in ſectione puncto B, ad E G applicatur B F ipſi A G æquidiſtans, & B M æquidiſtans A E : triangulum B M F à

45. primi huius.

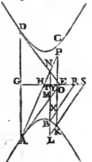
trian-

triangulo LHF differt, triangulo HAE. ergo BMF triangulũ à triangulo AKL differt, KFE triangulo.

CONSTAT igitur quadrilaterũ BKEM triangulo L K A æquale eſſe.

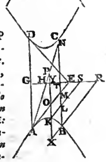
THEOREMA XII. PROPOSITIO XII.

IISDEM poſitis, ſi in una ſectione ſumantur duo puncta; & ab utriſque ſimiliter æquidiſtantes ducantur: quadrilatera, ab ipſis conſtituta, inter ſe æqualia erũt.

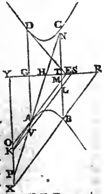


SINT eadem, quæ ſupra: & in ſectione A B ſumantur quævis puncta B, K; à quibus ducantur lineæ B L M N, K X O Y P ipſi A D æquidiſtãtes; itemque B X R, K L S æquidiſtantes A E. Dico quadrilaterum B P æquale eſſe quadrilatero K R. Quoniam enim demonſtratũ eſt triangulum A O P æquale quadrilatero K O E S. & triangulum A M N æquale quadrilatero B M E R. erit reliquum K R, deficiens quadrilatero B O vel ipſum aſſumens, æquale quadrilatero M P: & communi appoſito vel ablato B O, quadrilaterum B P quadrilatero X S æquale erit.

FED. COMMANDINVS



QVONIAM enim demonſtratum eſt triangulum A O P æquale quadrilatero K O E S. & triangulum A M N æquale quadrilatero B M E R.) *Demonſtratur hoc in antecedente. triangulum nanque K S T maius eſt, quàm triangulum P H T, triangulo H A E, ex quadrageſima quinta primi huius. ſed triangulum A P O unà cum triangulo T O E æquale eſt triangulo P H T unà cum triangulo H A E. quare ſequitur triangulum K S T maius eſſe, quàm triangulum A O P, triangulo T O E: & dempto communi T O E, reliquum A O P triangulum quadrilatero K O E S eſt æquale. rurſus linea B N ſecet diametrum E H in puncto T; erit triangulum B R T maius, quàm triangulum N H T, triangulo H A E. triangulum autem A M N unà cum ipſo E T M æquale eſt triangulo N H T unà cum H A E. ergo triangulum B R T maius erit, quàm triangulum A M N, triangulo E T M: & dempto communi triangulo E T M, quod relinquitur triangulum A M N, quadrilatero B M E R æquale erit. Itaque in prima figura, cùm triangulum A O P excedat triangulum A M N, quadrilatero M P; & quadrilaterum K O E S excedat B M E R quadrilatero K R, dempto tamen ex eo prius quadrilatero B O: ſi ipſum B O quadrilaterum utrinque apponatur; erit quadrilaterum K R, hoc eſt X S quadrilatero B P æquale. In ſecunda verò figura triangulum A M N excedit triangulum A O P, quadrilatero M P. & quadrilaterum B M E R excedit K O E S, quadrilatero K R, dempto tamen ex eo quadrilatero B O. quare B O utrique addito, erit quadrilaterum K R æquale quadrilatero L P. Denique in tertia figura, quoniam triangulum A O P eſt æquale quadrilatero K O E S; dempto communi K O A V, reliquum triangulum V K P æquale*



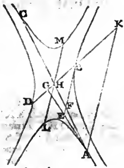
V K P

erit quadrilatero V A E S. eſt autem triangulo A M N æquale quadrilaterum B M E R. triangulum igitur V K P unà cum quadrilatero B M E R æquale eſt triangulo A M N unà cum quadrilatero V A E S: & dempto ex utriſque communi L M E S, reliquum V K P triangulum unà cum B L S R eſt æquale triangulo A M N unà cum V A M L. Quòd ſi utriſque addatur commune X P V L B; erit quadrilaterum K R æquale quadrilatero X P N B. ſimili ratione & alia eiuſmodi demonſtrare licebit.

THEOREMA XIII. PROPOSITIO XIII.

SI in oppoſitis ſectionibus, quæ coniugatæ appellantur, rectæ lineæ contingentes ſectiones, quæ deinceps ſunt, in unum punctum conveniant; & per tactus diametri ducantur: triangula, quorum communis vertex eſt ſectionum centrum, inter ſe æqualia erunt.

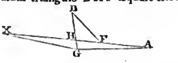
SINT oppoſitæ ſectiones, quæ coniugatæ appellantur, A, B, C, D; & ſectiones A, B contingant rectæ lineæ A E, B E in punctoE convenientes: ſit autem centrum H; & iunctæ A H, B H ad C, D producantur. Dico B F H triangulum triangulo A G H æquale eſſe. Ducantur enim per A, H lineæ A K, H L M ipſi B E æquidiſtantes. Et quoniam B F E ſectionem contingit; & per tactum diameter eſt D H B; duciturque L M æquidiſtans B E: erit L M diameter coniugata ipſi D B, quæ 30. ſecũdi huius.
ſecunda diameter appellatur: & propterea A K ad B D ordinatim eſt applicata. contingit autem A G. ergo rectangulum K H G æquale eſt quadrato B H; & ut K H 38. primi huius.
ad H B, ita B H ad H G. ſed ut K H ad H B, ita K A ad 14. ſexti.
B F, & A H ad H F. ut igitur A H ad H F, ita B H ad H G. & ſunt anguli B H F, G H F duobus rectis æquales. ergo A G H triangulum triangulo B H F æquale erit.

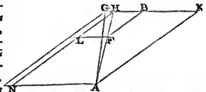


EVTOCIVS.

VT igitur A H ad H F, ita B H ad H G. & ſunt anguli B H F, G H F duobus rectis æquales. ergo A G H triangulum triangulo B H F æquale erit.)

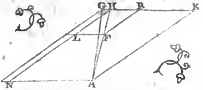
DESCRIBANTVR ſeorſum triangula: & producta A H ad X, fiat ut G H ad H B, ita F H ad H X. Itaque quoniam ut B H ad H G, ita eſt A H ad H F; erit A H ipſi H X æqualis: 9. quinti. 1. ſexti. *& propterea triangulum A G H æquale triangulo G H X. ſed ut X H ad H F, ita B H ad H G: & circa æquales angulos, qui ſunt ad verticẽ H, latera ex contraria parte ſibi ipſis reſpondent. triangulũ* 15. ſexti. *igitur F H B triangulo G H X eſt æquale: & iccirco æquale triangulo A G H.*





SED & aliter demonſtrare poſſumus triangula æqualia eſſe. Quoniam enim oſtenſum eſt, ut K H ad H B, ita B H ad H G: & ut K H ad H B, ita A K ad B F. erit ut A K ad B F, ita B H ad H G. quare re- 16. ſexti.
ctan-

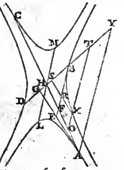
29. primi. *ſt angulum ex A K & H G æquale eſt rectangulo F B H. & cùm anguli G H L, H B F ſint æquales: ſi parallelogramma romboidea deſcripſerimus, iiſdem lateribus contenta,*
14. ſexti. *quæ angulos ad B, H æquales habeant; etiã inter ſe ſe æqualia erunt, propterea quòd latera ex contraria parte ſibi ipſis reſpondẽt:*
41. primi. *atque erit romboides F B H L in angulo B trianguli H B F duplum; cuius quidem diameter eſt F H: romboides autem, quod continetur G H & linea æquali A K, videlicet H L N in angulo G H N, duplum trianguli A G H. ſunt enim in eadem baſi G H & ſub eadem linea, quæ à puncto A ducitur ipſi G H æquidiſtans. triangulum igitur A G H triangulo F B H æquale eſſe mani-*
15. quinti. *feſtò conſtat.*



THEOREMA XIV. PROPOSITIO XIV.

IISDEM poſitis, ſi in quavis ſectione punctum ſumatur; & ab ipſo ducantur lineæ æquidiſtantes contingentibus uſque ad diametros: triangulum, quod ad centrum conſtituitur, à triangulo circa eundem angulum differt, triangulo baſim habente lineam contingentem, & verticem ſectionum centrum.

SINT alia quidem eadem; ſumatur autem punctum in B ſectione, quod ſit X; & per ipſum ducatur X R S æquidiſtans A G, & X O T æquidiſtans B E. Dico triangulum O H T à triangulo X T S differre, triangulo H B F. Ducatur enim à
A punĉto A linea A Y ipſi B F æquidiſtans. Quoniam igitur ex ijs, quæ dicta ſunt, ſectionis A L diameter eſt L H M; coniugata autem ipſi & ſecunda diameter D H B; atque à puncto A ducitur A G ſectionem con-
B tingens; & applicata eſt A Y, quæ ipſi L M æquidi-
C ſtat: habebit A Y ad Y G proportionem compoſitam ex proportione H Y ad Y A, & ex proportione tranſverſi lateris figuræ, quæ fit ad L M, ad latus rectum. ſed ut A Y ad Y G, ita X T ad T S; & ut H Y ad Y A,
D ita H T ad T O, & H B ad B F: ut autem figuræ, ad L M, tranſverſum latus ad rectum, ita figuræ, quæ ad B D, rectum latus ad tranſverſum. ergo X T ad T S proportionem habebit compoſitam ex proportione H B ad B F, hoc eſt H T ad T O, & ex
E proportione recti lateris figuræ, quæ eſt ad B D, ad latus tranſverſum. quare per ea, quæ demonſtrata ſunt in quadrageſimo primo theoremate primi libri, triangulum T H O à triangulo X T S differt, triangulo B F H: & propterea triangulo A G H.

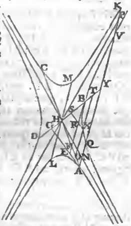


FED. COMMANDINVS.

A QVONIAM igitur ex ijs, quæ dicta ſunt, ſectionis A L diameter eſt L H M; coniugata autem ipſi & ſecunda diameter D H B.) *Hoc ex vigeſima propoſitione ſecundi libri Apollonij conſtare poteſt: ſed tamen ex alijs demonſtrare conabimur.*

pro-

Producatur enim AY uſque ad ſectionem C M in K; quæ ſectionem B ſecet in punctis Q, V: conveniet enim AY cum utraque ſectione A L, C M in uno tantùm puncto; quod in ſexta decima ſecundi huius demonſtratur: & erunt AY, YK inter ſe æquales. ductis namque ſectionum aſymptotis N H, H P, linea A N eſt æqualis P K, ex ſexta decima, quam diximus; & N Q æqualis V P, ex octava eiuſdem. ſed & Q Y æqualis eſt Y V; quòd Q V contingenti B E æquidiſtet. ergo AY, YK inter ſe æquales ſunt. Itaque quoniam linea A K oppoſitas ſectiones A L, C M ſecat, non tranſiens per centrum; & à puncto ipſius medio Y ad centrum H ducitur Y B H D: erit ex trigeſima ſeptima ſecundi huius D H B oppoſitarum ſectionum diameter, quæ recta appellatur; L H M verò, quæ æquidiſtat A K, tranſverſa ipſi coniugata. Poteſt etiam hoc oſtendi ex quadrageſima tertia eiuſdem. Nam cùm linea Q V ſectionem B in duobus punctis ſecet; & per centrum H ad medium quidem lineæ Q V ducta ſit H Y, L H M verò ipſi æquidiſtans: erunt L M, B D ſectionum coniugatæ diametri: & iccirco ſectionis A L diameter eſt L M, & D B ipſi coniugata & ſecunda diameter. 47. primi huius.

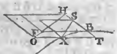


Et applicata eſt A Y, quæ ipſi L M æquidiſtat.] *Applicatur enim A Y ad diametrum D B ordinatim. quoniam, ut demonſtravimus, linea A K ab ipſa D B bifariam ſecatur.* B

Habebit A Y ad Y G proportionem compoſitam ex proportione H Y ad Y A, & ex proportione tranſverſi lateris figuræ, quæ fit ad L M, ad latus rectum.] *Ex quadrageſima primi huius, recta enim linea A G ſectionem A L contingens cum ſecunda diametro convenit: & à puncto A ad eandem diametrum applicatur A Y, alteri diametro L M æquidiſtans, ut oſtendimus.* C

Vt autem figuræ, quæ ad L M, tranſverſum latus ad rectum, ita figuræ, ad B D, rectum latus ad tranſverſum.) *Hoc ita eſſe nos demonſtravimus in commentariis in vigeſimam ſecundi huius.* D

Quare per ea, quæ demonſtrata ſunt in quadrageſimo primo theoremate primi libri, triangulum T H O à triangulo X T S differt, triangulo B F H; & propterea triangulo A G H.] *Deſcribantur enim à lineis X T, H B, H T parallelogramma æquiangula X T S, H B F, H T O in triangulorum angulis. Et quoniam linea X T in ſectione B ad diametrum ordinatim applicatur; habetque X T ad T S proportionem compoſitam ex proportione H B ad B F, & proportione recti lateris ad tranſverſum; & eſt parallelogrammum H T O ſimile parallelogrammo H B F; quòd triangulum triangulo ſimile: erit ex quadrageſima prima primi huius parallelogrammum H T O maius, quàm parallelogrammum X T S, parallelogrammo H B F. ſed parallelogramma triangulorum dupla ſunt. triangulum igitur H T O à triangulo X T S differt, triangulo H B F, hoc eſt triangulo A G H, quod ipſi H B F eſt æquale, ex antecedenti.* E

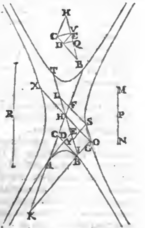


THEOREMA XV. PROPOSITIO XV.

SI unam oppoſitarum ſectionum, quæ coniugatæ appellantur, rectæ lineæ contingentes conveniant; & per tactus diametri ducantur; ſumatur autem punctum in quavis ſectionum coniugatarum; & ab ipſo ducantur æquidiſtantes contingentibus uſque ad diametros:

metros: triangulum, quod ab ipſis ad ſectionem conſtituitur, maius eſt, quàm triangulum, quod ad centrum, triangulo baſim habente lineam contingentẽ, & verticem centrum ſectionum.

SINT oppoſitæ ſectiones, quæ coniugatæ dicuntur, A B, G S, T,X, quarum centrum H; & ſectionem A B contingant A D E, B D C; & per tactus A,B diametri A H F, B H T ducantur: ſumatur autem in G S ſectione punctum S; à quo ducatur S F L ipſi B C æquidiſtans, & S Y æquidiſtans A E. Dico S L Y triangulum maius eſſe, quàm triangulum H L F, triangulo H C B. Ducatur enim per H, X H G æquidiſtans B C; & per G ipſi A E æquidiſtans ducatur K I G, &
A S O æquidiſtans B T. quare perſpicuum eſt diametrum X G coniugatam eſſe ipſi
B B T; & S O, quæ æquidiſtat B T, ad H G O ordinatim eſſe applicatam; itemque parallelogrammum eſſe S L H O. quoniam igitur B C ſectionem contingit; duciturque B H per tactum; & contingit altera A E: fiat ut D B ad B E, ita li-
C nea M N ad duplam ipſius B C; erit M N linea, quæ figuræ ad B T conſtitutæ rectum latus appellatur. ergo ſecta M N bifariam in P, ut D B ad B E, ita eſt M P
D ad B C. deinde fiat ut X G ad T B, ita T B ad lineam R; erit & R latus rectum
lem.in 22. decimi. figuræ, quæ fit ad X G. Itaque quoniam ut D B ad B E, ita M P ad C B, & ut
1.ſexti. D B ad B E, ita quadratum D B ad D B E rectangulum: ut autem M P ad C B, ita rectangulum ex M P & B H ad rectangulum C B H. erit ut quadratum D B ad rectangulum D B E, ita rectangulum ex M P & B H ad rectangulum C B H. ſed rectangulum ex M P & B H æquale eſt quadrato
E H G: propterea quòd quadratum X G eſt æquale
20.ſexti. rectangulo ex T B & M N; & rectangulum ex M P & B H quarta pars eſt rectanguli ex T B & M N; quadratum verò G H eſt item quarta pars quadrati X G. ut igitur quadratum D B ad rectangulum D B E, ita eſt quadratum G H ad rectangulum C B H; & permutando ut quadratum D B ad quadratum G H, ita rectangulum D B E ad C B H rectan-
F gulum. ſed ut quadratum D B ad quadratum G H, ita triangulum D B E ad triangulum G H I; ſimi-
G lia enim ſunt: & ut rectangulum D B E ad rectangulum C B H, ita D B E triangulum ad triangulum C B H. ut ergo triangulum D B E ad triangu-



9.quinti. lum G H I, ita triangulum D B E ad ipſum C B H triangulum. quare triangulum G H I triangulo CBH eſt æquale: & iecirco triangulum G H K à triangulo HIK
15.quinti. differt, triangulo G H I, hoc eſt triãgulo C B H. rurſus quoniam HB ad B C compoſitam proportionem habet ex proportione HB ad MP, & ex proportione MP ad
H K BC. & ut HB ad MP, ita TB ad MN, & linea R ad XG: ut autem MP ad BC, ita D B ad B E. habebit H B ad B C proportionem compoſitam ex proportione D B ad B E, & proportione R ad X G. quòd cùm æquidiſtent B C, S L; triangulum H C B ſimile eſt triangulo H L F: & ob id ut H B ad B C, ita eſt H L ad L F. quare H L ad L F compoſitam proportionem habet ex proportione lineæ R ad X G, & proportione D B ad B E, hoc eſt G H ad H I. quoniam igitur hyperbole eſt S G; cuius diameter quidem X G, rectum verò latus R; & ab aliquo ipſius puncto S applicatur S O: deſcribiturque ab ea, quæ ex centro, videlicet ab H G figura H I G; & ab applicata S O, vel H L ipſi æquali figura HLF: ab H O autem,

quæ

quæ eſt inter centrum & applicatam, vel ab S L ipſi H O æquali deſcribitur S L Y figura, ſimilis figuræ H I G, quæ fit ab ea, quæ ex centro; & proportiones habet compoſitas, ut dictum eſt; erit triangulum S L Y maius, quàm H L F triangulum, triangulo H C B.

FED. COMMANDINVS.

QVARE perſpicuum eſt diametrum X G coniugatam eſſe ipſi B T.) *Ex vigeſima ſecundi huius. linea enim B C ſectionem contingit: & per centrum H ducitur T H B quidem ad tactum, X H G verò contingenti æquidiſtans.* A

Et S O, quæ æquidiſtat B T ad H G O ordinatim eſſe applicatam) *Si enim per G ducatur linea ſectionem contingens; æquidiſtabit ipſi T H B, ex eadem vigeſima ſecundi. quare & ipſi S O: proptereaque ex quadrageſima ſeptima primi huius S O ad H G O ordinatim erit applicata.* B

Erit M N linea, quæ figuræ ad BT conſtitutæ rectum latus appellatur.] *Ex quinquageſima primi huius.* C

Erit & R rectum latus figuræ, quæ fit ad X G.] *Eſt enim ſectionis S G diameter, ſiue tranſverſum latus X G; & B T ſecunda diameter ipſi coniugata, ut dictum eſt: ſecunda autem diameter mediam proportionem habet inter figuræ latera; quod ex eius diffinitione apparet.* D

Propterea quòd quadratum X G æquale eſt rectangulo ex T B & M N.) *Ex diffinitione ſecundæ diametri. nam X G ſecunda diameter eſt ſectionis A B; cuius quidem tranſverſum latus eſt T B, rectum verò M N.* E

Sed ut quadratum D B ad quadratum G H, ita triangulum D B E ad triangulum G H I: ſimilia enim ſunt.) *Triangula enim D B E, G H I ſimilia ſunt ob æquidiſtantiam linearum D B, H G; itemque linearum A E, K G. quare triangulum D B E ad ipſum G H I duplam proportionem habet eius, quæ eſt lineæ D B ad G H: & ſimiliter quadratum D B ad quadratum G H proportionem habet eiuſdem proportionis duplam. ut igitur quadratum D B ad quadratum H G, ita triangulum D B E ad triangulum G H I.* F 19. ſexti.

Et ut rectangulum D B E ad rectangulum C B H, ita D B E triangulum ad triangulum C B H.] *Deſcribantur ſeorſum triangula D B E, C B H; & ducantur perpendiculares D Q, C V: erunt D B Q, C B V triangula inter ſe ſimilia. quare ut D Q ad D B, ita rectangulum ex D Q & B E ad rectangulum D B E, ex prima ſexti Elementorum: & eadem ratione ut C V ad C B, ita rectangulum ex C V & B H ad rectangulum C B H. ergo ut rectangulum ex D Q & B E ad rectangulum D B E, ita rectangulum ex C V & B H ad rectangulum C B H; & permutando rectangulum ex D Q & B E ad rectangulum ex C V & B H, ut D B E rectangulum ad rectangulum C B H. rectangulum autem ex D Q & B E duplum eſt trianguli D B E; & rectangulum ex C V & B H duplum trianguli C B H. ergo ut rectangulum D B E ad rectangulum C B H, ita D B E triangulum ad triangulum C B H.* G

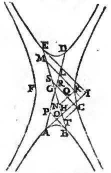
Et linea R ad X G.] *Vt enim figura, quæ ad T B conſtituitur, tranſverſum latus T B ad rectum M N, ita figura, quæ ad X G, rectum latus R ad X G tranſverſum; quod nos in vigeſima ſecundi huius oſtendimus.* H

Vt autem M P ad B C, ita D B ad B E.] *Patuit hoc ſupra.* K

Erit triangulum L S Y maius, quàm H L F triangulum, triangulo H C B.] *Nam ex quadrageſima prima primi huius ſequitur triangulum S L Y maius eſſe, quàm triangulum H L F, triangulo G H I, hoc eſt triangulo C B H; quod ipſi G H I eſt æquale, ut oſtenſum eſt ſuperiùs.* L

ILLVD autem, quod hìc demonſtrat Apollonius, ſequitur etiam, ſi rectæ lineæ ſectiones oppoſitas contingant. Sint enim oppoſitæ ſectiones, quæ coniugatæ appellantur,

A B, C, D E, F, quarum centrum G; & ſectiones A B, D E contingant recta lineæ A H I, E I in puncto I convenientes; perque A, E ductis diametris A G D, E G B, ſumatur in ſectione C punctum K; à quo ducatur K L M quidem ipſi E I æquidiſtans, & K N æquidiſtans A I. Dico triangulum K M N maius eſſe, quàm triangulum L M G, triangulo G A H. Ducatur per B linea B O P ſectionem in B contingens, quæ ipſi E I æquidiſtabit, ex demonſtratis ab Eutocio in quadrageſimam quartam primi huius. quare & K M æquidiſtat B P. Itaque quoniam ſectionem A B contingunt recta linea A O, O B; & à puncto K in ſectione ſumpto ducuntur K L M, K N, contingentibus æquidiſtantes: eodem modo, quo ſupra, demonſtrabitur triangulum K M N maius, quàm triangulum L M G, triangulo G A H. atque hoc eſt, quod demonſtrandum proponebatur. Ex iam dictis etiam illud Theorema oſtendi poteſt.



IISDEM poſitis, ſi in quavis ſectione aliqua puncta ſumantur; & ab ipſis ducantur lineæ contingentibus æquidiſtantes, quæ & contingentibus & diametris occurrant: quadrilatera, à lineis ductis conſtituta ad diametros, inter ſe æqualia erunt:

MANEANT enim eadem, quæ ſupra; & in ſectione C aliud punctum ſumatur, quod ſit C: atque ab eo ducantur C Q R S, C T contingentibus æquidiſtantes. Dico quadrilaterum K L R Q quadrilatero C Q N T æquale eſſe. Ex ijs enim, quæ demonſtrata ſunt, triangulum C S T maius eſt, quàm triangulum R S G, triangulo G A H. quare quadrilaterum C R G T triangulo G A H eſt æquale. & ſimili ratione cùm triangulum K M N maius ſit, quàm triangulum L M G, triangulo G A H; erit & quadrilaterum K L G N æquale eidem G A H triangulo. quadrilatera igitur C R G T, K L G N inter ſe æqualia erunt: & dempto communi quadrilatero R G N Q, relinquetur quadrilaterum K L R Q quadrilatero C Q N T æquale; quod quidem demonſtrare oportebat.

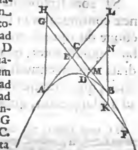
THEOREMA XVI. PROPOSITIO XVI.

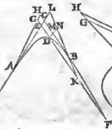
SI coni ſectionem, vel circuli circunferentiam duæ rectæ lineæ contingentes in unum conveniant; & ab aliquo puncto eorum, quæ ſunt in ſectione, ducatur linea uni contingentium æquidiſtans, quæ & ſectionem & alteram contingentium ſecet: ut quadrata contingentium inter ſe ſe, ita erit rectangulum contentum lineis, quæ interijciuntur inter ſectionem & contingentem, ad quadratum lineæ inter æquidiſtantem & tactum interiectæ.

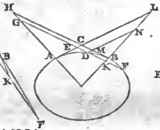
SIT coni ſectio, vel circuli circunferentia A B, quam contingant rectæ lineæ A C, C B, in puncto C convenientes: & ſumpto aliquo puncto D in ſectione, ab eo ducatur D F, quæ ipſi B C æquidiſtet. Dico ut quadratum B C ad C A quadratum, ita eſſe rectangulum F E D ad quadratum E A. Ducatur enim
46.& 47. per A, B diametri A G H, K B L; & per D ducatur D M N æquidiſtans A L: perſpi-
pr. huius. cuum eſt, lineam D K ipſi K F æqualem eſſe, triangulumque A E G æqua-
2 huius. le quadrilatero D L, & triangulum B L C triangulo A C H. Itaque quo-
1.huius.
niam

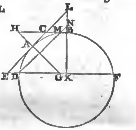
niam F K æqualis eſt K D; & ipſi adijcitur D E: rectangulum F E D unà cum D K quadrato æquale erit quadrato K E. eſt autem triangulum E L K ſimile triangulo D N K. quare ut E K quadratum ad quadratum K D, ita triangulum E L K ad triangulum D N K, & permutando ut totum quadratum E K ad totum triangulum E L K, ita ablatum quadratũ D K ad ablatum triangulum D N K. ergo & reliquum F E D rectangulum ad reliquum quadrilaterum D L, ut quadratum E K ad triangulum E L K. ſed ut quadratum E K ad E L K triangulum, ita eſt quadratum C B ad triangulum L C B. ut igitur F E D rectangulum ad quadrilaterum D L, ita quadratum C B ad L C B triangulum. eſt autem quadrilaterum D L triangulo A E G æquale; & triangulum L C B æquale triangulo A H C. quare ut rectangulum F E D ad triangulum A E G, ita quadratum C B ad A H C triangulum: & permutando ut rectangulum F E D ad quadratum C B, ita A E G triangulum ad triangulum A H C. ſed ut triangulum

6.ſecũdi element. 3. lemma Pappi. 19.quinti 3.lemma Pappi.









A G E ad triangulum A H C, ita quadratum E A ad A C quadratum. ergo ut rectãgulum F E D ad quadratum C B, ita quadratum E A ad quadratũ A C, & permutando ut quadratum B C ad quadratum C A, ita F E D rectangulũ ad quadratum E A.

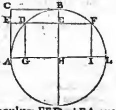
EVTOCIVS.

IN aliquibus codicibus hoc theorema, ut ſeptimum decimum apponitur: ſed re vera caſus eſt ſexti decimi theorematis. eo enim tantum differt, quòd lineæ contingentes A C, C B diametris æquidiſtant: alia verò eadem eſſe conſtat. In commentarijs igitur illud ponere oportebat, ut ſcripſimus in quadrageſimũ primũ theorema primi libri.

SI in ellipſi & circulo diametri, quæ tranſeunt per tactus, contingentibus æquidiſtantes ſint; eadem prorſus euenient, quæ in propoſitione dicuntur.

QVONIAM enim ut quadratum B H ad rectangulum L H A, ita D G quadratum ad rectangulum L G A: atque eſt rectangulum quidem L H A quadrato A H æquale: rectangulum autem L G A æquale rectangulo I A G; quòd linea A H æqualis ſit H L, & D K ipſi K F: propterea que G H æqualis H I, & A G ipſi I L. erit ut quadratum A H ad H B quadratum, hoc eſt quadratum B C ad quadratum C A, ita rectangulum I A G ad quadratum D G, hoc eſt rectangulum F E D ad E A quadratum. 11. primi huius.



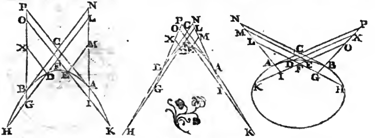


THE-

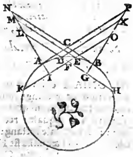
THEOREMA XVII. PROPOSITIO XVII.

SI coni ſectionem, vel circuli circunferentiam duæ rectæ lineæ contingentes in unum conveniant; ſumantur autem in ſectione duo quævis puncta; & ab ijs ducantur lineæ contingentibus æquidiſtantes, quæ & ſibi ipſis & lineæ occurrant: ut quadrata contingentium inter ſeſe, ita erit rectangulum contentum lineis, quæ interijciuntur inter ſectionem & linearum occurſum, ad rectangulum, quod lineis ſimiliter ſumptis continetur.

SIT coni ſectio, vel circuli circunferentia A B; quam contingant A C, C B rectæ lineæ, in puncto C convenientes: ſumanturque in ſectione puncta D,E; & ab ipſis ducantur E F I K, D F G H, quæ lineis A C, C B æquidiſtent. Dico ut quadratum A C ad C B quadratum, ita eſſe rectangulum K F E ad rectangulum



H F D. Ducantur enim per A,B diametri A L M N, B O X P; & producantur contingentes lineæ, & ipſis æquidiſtantes uſque ad diametros; & à punctis D,E æquidiſtantes contingentibus ducantur D X, E M: iam conſtat K I æqualem
A eſſe I E, & H G ipſi G D. Quoniam igitur K E ſecatur in partes æquales in
5. ſecũdi. puncto I, & in partes inæquales in F; rectangulum
K F E unà cum F I quadrato æquale eſt quadrato
B E I. & cùm triangula ſimilia ſint ob lineas æquidiſtantes; erit ut totum quadratum E I ad totum I M E triangulum, ita ablatum quadratum I F ad ablatum triangulum F I L. quare & reliquum K F E rectangulum ad reliquum quadrilaterum F M eſt, ut totum quadratum E I ad totum I M E triangulum. ſed ut quadratum E I ad triangulum I M E, ita quadratum A C ad triangulum C A N. ut igitur K F E rectangulum ad quadrilaterum F M, ita
C quadratum A C ad C A N triangulum. atque eſt
D æquale triangulum C A N triangulo C P B, & quadrilaterum F M quadrilatero F X. ergo ut rectangulum K F E ad F X quadrilaterum, ita quadratum A C ad triangulum C P B; ſimiliter demonſtrabitur & ut rectangulum H F D ad quadrilaterum F X, ita eſſe quadratum C B ad triangulum C P B. itaque quoniam ut rectangulum K F E ad
E quadrilaterum F X, ita quadratum A C ad C P B triangulum; & convertendo ut



qua-

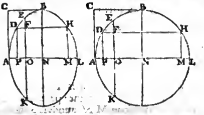
quadrilaterum F X ad rectangulum H F D, ita triangulum C P B ad quadratum C B. erit ex æquali ut quadratum A C ad C B quadratum, ita rectangulum K F E ad rectangulum H F D.

EVTOCIVS.

HOC theorema ſimiliter ac præcedens poſitum eſt, quod nos, ut caſum auferentes, hoc loco conſcripſimus.

SI in ellipſi, & circuli circunferentia diametri, quæ per tactus ducuntur, æquidiſtantes ſint contingentibus AC, CB: erit itidem ut quadratum AC ad quadratum CB, ita rectangulum KFE ad rectaugulum DFH.

DVCANTVR enim per D,H ordinatim applicatæ D P, H M. Et quoniam ut quadratum A C ad C B quadratum, ita quadratum B N ad quadratum N A, hoc eſt ad rectangulum A N L. ut autem quadratum B N ad rectangulum A 21. primi huius.
N L, ita quadratum D P, hoc eſt quadratum F O ad rectangulum A P L; & quadratum EO ad rectangulum A O L. erit & reliquum ad reliquum, ut totum ad totum. ſed ſi à quadrato E O auferatur D P quadratum, hoc eſt quadratum F O; relinquitur rectangulum K F E: eſt enim K O ipſi O E æqualis. 5. ſecũdi.
rurſus ſi à rectangulo A O L auferatur rectangulum A P L; relinquitur M O P rectangulum, hoc eſt rectangulum H F D: nanque A P eſt æqualis M L & P N ipſi N M. ut igitur quadratuum A C ad quadratum C B, ita reliquum rectangulum K F E ad reliquum H F D. Quòd ſi punctum F extra ſectionem cadat; additiones & ablationes contra facere oportebit.



FED. COMMANDINVS.

QVONIA M igitur K E ſecatur in partes æquales in puncto I, & in partes inæquales in F; rectangulum K F E una cum F I quadrato æquale eſt quadrato E I.) *Ita quidem argumentabimur; cùm punctum F cadit intra ſectionem: ſed cùm cadit extra; in hunc modum dicemus. Quoniam K E in puncto I bifariam ſecatur; & ipſi adijcitur recta linea E F: erit rectangulum K F E unà cum E I quadrato æquale quadrato E F. ſunt autem triangula F L I, E M I inter ſe ſimilia. quare cùm ſit ut totum quadratum I F ad totum triangulum F L I, ita ablatum quadratum E I ad ablatum E M I triangulum; erit & reliquum rectangulum K F E ad reliquum quadrilaterum F M, ut I F quadratum ad triangulum F L I. Cætera, quæ deinceps ſequuntur, eodem modo concludemus.* A

Et cùm triangula ſimilia ſint ob lineas æquidiſtantes; erit ut totum quadratum E I ad totum I M E triangulum, ita ablatum quadratum I F ad ablatum triangulum F I L.] *Eſt enim per tertium lemma Pappi ut quadratum E I ad quadratum I F, ita triangulum I M E ad F I L triangulum. quare & permutando ut quadratum E I ad triangulum I M E, ita quadratum I F ad triangulum F I L.* B

Atque eſt æquale triangulum C A N triangulo C P B.] *Ex prima huius* C

Et quadrilaterum F M quadrilatero F X.] *Ex tertia huius.* D

Et convertendo ut quadrilaterum F X ad rectangulum H F D, ita triangulum E

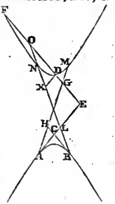
C P B ad quadratum C B.) *Superiùs enim demonſtratum eſt, ut rectangulum H F D ad quadrilaterum F X, ita quadratum C B ad triangulum C P B.*

IN ALIAM DEMONSTRATIONEM, QVÆ AB EVTOCIO AFFERTVR.

F RVRSVS ſi à rectangulo A O L auferatur rectangulum A P L; relinquitur M O P rectangulum.] *Nam rectangulum A O L æquale eſt rectangulo M O P unà cum rectangulo A P L: quod quidem primùm demonſtratum eſt à Pappo in tertio, & quarto eorum lemmatum, quæ in ſecundum librum Apollonij conſcripſit; deinde ab Eutocio in Commentarijs in vigeſimam tertiam ſecundi huius.*

THEOREMA XVIII. PROPOSITIO XVIII.

SI in oppoſitas ſectiones duæ rectæ lineæ contingentes in unũ conveniant; ſumatur autem in quavis ſectione aliquod punctum; & ab eo ducatur linea uni contingentium æquidiſtans, quæ & ſectionem & alteram contingentium ſecet: ut quadrata contingentium inter ſe ſe, ita erit rectangulum contentum lineis, quæ interijciuntur inter ſectionem & contingentem, ad quadratum lineæ inter æquidiſtantem & tactum interiectæ.



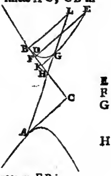
SINT oppoſitæ ſectiones A B, M N; & contingentes lineæ A C L E, B C H; quæ in puncto C conveniant: per tactus autem ducantur diametri A M, B N; & ſumatur in ſectione M N quodvis punctum D, à quo ducatur D F G E ipſi B C æquidiſtans. Dico, ut quadratum B C ad quadratum C A, ita eſſe rectangulum F E D ad quadratum A E. Ducatur enim per D ipſi A E æquidiſtans D X. Et quoniam hyperbole eſt A B, cuius diameter B N; lineaque B H ſectionem contingit; & ipſi æqui-
A diſtat D F: erit F O æqualis O D. adiungitur autem D E.
6. ſecũdi. ergo rectangulum F E D unà cum D O quadrato æquale eſt quadrato O E, & cùm E L æquidiſtet D X; triangulum E O L ſimile eſt triangulo D O X. eſt igitur ut totum quadratum E O ad triangulum E O L, ita ablatum
19. quĩti. quadratum D O ad ablatum D O X triangulum. quare & reliquum rectangulum F E D ad quadrilaterum D L,
B ut E O quadratum ad triangulum E O L. ſed ut quadratum E O ad E O L triangulum, ita quadratum B C ad triangulum B C L. ut igitur rectangulum F E D ad quadrilaterum D L, ita quadratum B C ad B C L triangu-
C D lum. æquale autem eſt quadrilaterum D L triangulo A E G, & triangulum B C L triangulo A C H. ergo ut F E D rectangulum ad triangulum A E G, ita quadratum B C ad A C H triangulum. ſed ut triangulum A E G ad quadratum E A, ita triangulum A C H ad quadratum A C. ex æquali igitur ut quadratum B C ad quadratum C A, ita rectangulum F E D ad E A quadratum.

E V T O C I V S.

IN aliquibus exemplaribus alia demonſtratio huius theorematis invenitur; cùm utranque ſectionem contingentes rectæ lineæ conveniant.

SINT

SINT enim oppoſitæ ſectiones A ,B; quas contingant lineæ A C, C B in puncto C convenientes; ſumaturque aliquod punctum D in B ſectione; & ab eo ducatur D E F, ipſi A C æquidiſtans. Dico ut quadratum A C ad C B quadratum, ita eſſe rectangulum E F D ad quadratum F B. Ducatur enim per A diameter A H G; & per B,G ducantur B L, G K æquidiſtantes E F. Quoniam igitur B H in puncto B hyperbolen contingit; & ordinatim applicata eſt B L: erit ut A L ad L G, ita A H ad H G. ſed ut A L ad L G, ita C B ad B K: & ut A H ad H G, ita A C ad K G. quare ut C B ad B K, ita A C ad K G: & permutando ut A C ad C B, ita G K ad K B. ſed ut quadratum A C ad quadratum C B, ita quadratum G K ad K B quadratum; & ut quadratum G K ad quadratum K B, ita demonſtratum eſt rectangulum E F D ad quadratum F B. ergo ut quadratum A C ad C B quadratum, ita E F D rectangulum ad quadratum F B.



FED. COMMANDINVS.

ERIT F O æqualis O D.] *Ex quadrageſima octava primi huius.* A

Sed ut quadratum E O ad E O L triangulum, ita quadratum B C ad triangulum B C L.] *Eſt enim triangulum B C L ſimile triangulo E O L: propterea quod linea E O æquidiſtat contingenti B C. ergo triangulum E O L ad triangulum B C L duplam proportionem habet eius, quæ eſt linea E O ad B C. quadratum autem E O ad quadratum B C proportionem itidem habet duplam eiuſdem proportionis. ut igitur quadratum E O ad B C quadratum, ita triangulum E O L ad triangulum B C L: & permutando ut quadratum E O ad E O L triangulum, ita quadratum BC ad triangulum BCL.* B 19. ſexti. 20. ſexti

Æquale autem eſt quadrilaterum D L triangulo A E G.] *Ex ſexta huius.* C

Et triangulum B C L triangulo A C H.] *Ex prima huius.* D

IN ALIAM DEMONSTRATIONEM, QVAM PONIT EVTOCIVS.

ERIT ut A L ad L G, ita A H ad H G.] *Ex trigeſima ſexta primi huius.* E

Sed ut A L ad L G, ita C B ad B K.] *Nam cum triangula A H C, L H B ſimilia ſint; erit ut A H ad H C, ita L H ad H B: & permutando ut A H ad H L, ita C H ad H B: componendoque ut A L ad L H, ita C B ad B H. ut autem H L ad L G, ita H B ad B K. ex æquali igitur ut A L ad L G, ita C B ad B K.* F

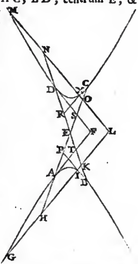
Et ut A H ad H G, ita A C ad K G.] *Ob ſimilitudinem videlicet triangulorum A H C, G H K.* G

Et ut quadratum G K ad quadratum K B, ita demonſtratum eſt rectangulum E F D ad quadratum F B.] *Demonſtratur hoc in decima ſexta huius.* H

THEOREMA XIX. PROPOSITIO XIX.

SI oppoſitas ſectiones duæ rectæ contingentes in unum conveniant; & ducantur contingentibus æquidiſtantes, quæ & ſibi ipſis, & ſectioni occurrant: ut quadrata contingentium inter ſe ſe, ita erit rectangulum contentum lineis, quæ interijciuntur inter ſectionem & linearum occurſum, ad rectangulum, quod lineis ſimiliter ſumptis continetur.

X SINT



SINT oppoſitæ ſectiones, quarum diametri A C, B D, centrum E; & contingentes A F, F D, quæ in F conveniant: ſumantur autem quævis puncta; & ab ipſis ducantur G H I K L, M N X O L lineis A F, F D æquidiſtantes. Dico ut A F quadratum ad quadratum F D, ita eſſe rectangulum G L I ad rectangulum M L X. Ducantur enim per X, I lineæ X R, I P æquidiſtantes ipſis A F, F D. Itaque quoniam ut quadratum A F ad A F S triangulum, ita quadratum H L ad triangulum H L O, & quadratum H I

6. ſecũdi & 19. quĩti. ad triangulum H I P: erit & reliquum rectangulum G L I ad reliquum I P O L quadrilaterum, ut

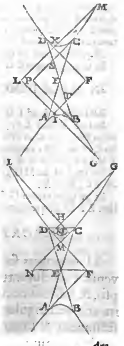
A quadratum A F ad triangulum A F S. atque eſt tri-

B angulum A F S triangulo D F T æquale, & O P I L quadrilaterũ quadrilatero K R X L. ut igitur quadratum A F ad triangulum D T F, ita rectangu-

C lum G L I ad quadrilaterum R X L K. eſt autem ut triangulum D T F ad F D quadratum, ita quadrilaterum R X L K ad rectangulum M L X. ergo ex æquali ut quadratum A F ad F D quadratum, ita rectangulum G L I ad rectangulum M L X.

E V T O C I V S.

IN aliquibus codicibus demonſtratio huius theorematis invenitur huiuſmodi.



DVCATVR M L quidem ipſi F A æquidiſtans, quæ ſectionem D C ſecet; G L verò æquidiſtans F D, & ipſam A B ſecans: demonſtrandum eſt ut quadratum D F ad F A quadratum, ita eſſe rectangulum G L I ad rectangulum MLX. Ducantur enim per tactus A, D diametri A C, D B; & per C, B ipſæ B P, P C contingenti-

D bus æquidiſtantes. ergo B P, P C ſectiones in punctis B,

E C contingunt. Et quoniam E centrum eſt ſectionum:

F erit B E ipſi E D æqualis, & A E æqualis E C. quare cùm æquidiſtent A T F, C S P; & T E æqualis erit E S:

G & propterea B S ipſi D T, triangulumque B P S triangulo D T F æquale. linea igitur B P æqualis eſt D F: &

H ſimiliter C P æqualis A F demonſtrabitur. ſed ut quadratum B P ad P C quadratum, ita eſt rectangulum G L I ad rectangulum M L X. ut igitur quadratum D F ad quadratum F A, ita G L I rectangulum ad rectangulum M L X.

ALITER IN IDEM.

RVRSVS ducatur utraque linearum G H K, I H L æquidiſtans contingenti, ſecanſque D C ſectionem: oſtendendum eſt ut quadratum D F ad quadratum F A, ita eſſe rectangulum I H L ad rectangulum G H K. Ducatur enim per A tactum diameter A C, & per C ipſa C

K M, quæ æquidiſtet A F. Ergo C M continget ſectionem E D in puncto C: atque erit ut quadratum DM ad qua-

dra-

dr atum M C, ita rectangulum I H L ad rectangulum G H K. ut autem D M quadr atum ad quadratum M C, ita quadratum D F ad quadratum F A. quare ut quadratum D F ad F A quadratum, ita rectangulum I H L ad rectangulum G H K.

FED. COMMANDINVS.

ATQVE eſt triangulum A F S triangulo D F T æquale.) *Ex quarta huius.* A

Et O P I L quadrilaterum quadrilatero K R X L.) *Ex ſeptima huius.* B

Eſt autem ut triangulum D T F ad F D quadratum, ita quadrilaterum R X L K ad rectangulum M L X.) *Eodem enim modo, quo ſupra demonſtratum eſt rectangulum G L I ad quadrilaterum I P L O, ut quadratum A F ad triangulum A F S, demonſtrabitur etiam M L X rectangulum ad quadrilaterum R X L K eſſe, ut quadratũ D F ad triangulum D T F. quare & convertendo ut triangulum D T F ad quadratum F D, ita erit quadrilaterum R X L K ad M L X rectangulum.* C

IN ALIAS DEMONSTRATIONES, QVÆ AB EVTOCIO AFFERVNTVR.

ERGO B P, P C ſectiones in punctis B, C contingunt.] *Hoc nos demonſtravimus in commentarijs in quadrageſimam quartam primi huius.* D

Et quoniam E centrum eſt ſectionum; erit B E ipſi E D æqualis, & A E æqualis E C.] *Ex trigeſima primi huius.* E

Quare cùm æquidiſtent A T F, C S P; & T E æqualis erit E S.] *Quoniam enim lineæ A T F, C S P inter ſe æquidiſtant; erunt triangula A T E, C S E ſimilia: & propterea ut A E ad E T, ita C E ad E S; & permutando ut A E ad E C, ita T E ad E S. lineæ igitur T E, E S inter ſe æquales ſunt. & addita S E ipſi E B, & T E ipſi E D, erit & B S æqualis D T.* F

Triangulumque B P S triangulo D T F æquale.] *Rurſus enim ob lineas æquidiſtantes B P, D F; itemque A F, C P: triangulum B P S ſimile eſt triangulo D T F; & ut S B ad B P, ita T D ad D F: & permutando ut B S ad D T, ita B P ad D F. eſt autem B S æqualis D T, ut demonſtratum eſt. ergo & B P ipſi D F. ex quibus conſtat triangulum B P S triangulo D T F etiam æquale eſſe.* G

Sed ut quadratum B P ad P C quadratum, ita eſt rectangulum G L I ad rectangulum M L X.) *Ex proximè demonſtratis.* H

Ergo C M continget ſectionem C D in puncto C.] *Ex ijs, quæ demonſtravimus in quadrageſimam quartam primi huius.* K

Atque erit ut quadratum D M ad quadratum M C, ita rectangulum I H L ad rectangulum G H K.) *Ex decima ſeptima huius.* L

Vt autem D M quadratum ad quadratum M C ita quadratum D F ad quadratum F A.] *Iiſdem enim manentibus, ducatur D C; & iuncta F E producatur, ut cum linea C M in puncto N conveniat: erit, ex trigeſima ſeptima & trigeſima nona ſecundi huius, F E N recta diameter oppoſitarum ſectionum; quæ ipſi D C æquidiſtabit: & iccirco triangula D M C, F M N inter ſe ſimilia erunt. itaque ut F M ad M N, ita D M ad M C: & permutando ut F M ad M D, ita N M ad M C. ergo componendo, convertendoque ut M D ad D F, ita M C ad C N: & rurſus permutando ut D M ad M C, ita D F ad C N. eſt autem F A ipſi C N æqualis; quod iam demonſtratum fuit. quare ut D M ad M C, ita D F ad F A. ut igitur quadratum D M ad M C quadratum, ita quadratum D F ad quadratum F A.* M

THEOREMA XX. PROPOSITIO XX.

SI oppoſitas ſectiones duæ rectæ lineæ contingentes ſibi ipſis

occurrant; & per occurſum ducatur linea tactus coniungenti æquidiſtans, quæ ſecet utranque ſectionem; ducatur autem alia linea æquidiſtans eidem, ſectioneſque & contingentes ſecans: erit ut rectangulum contentum lineis, quæ inter occurſum contingentium & ſectiones interijciuntur, ad quadratum lineæ contingentis, ita rectangulum, quod continetur lineis inter ſectiones & contingentẽ interiectis, ad quadratum lineæ ad tactum abſciſſæ.

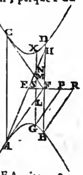
SINT oppoſitæ ſectiones A B, C D, quarum centrum E, & A F, F C lineæ contingentes: iungantur autem A C, E F, A E, & protrahantur; perque F ducatur B F H D ipſi A C æquidiſtans; & ſumpto in ſectione quouis puncto G, ducatur G L S M N X æquidiſtans A C. Dico ut rectangulum B F D ad quadratum F A, ita eſſe rectangulum G L X ad quadratum A L. Ducantur enim à punctis G, B lineæ G P, B R æquidiſtantes ipſi A F. Et quoniam ut quadratum B F ad B F R triangulum, ita quadratum G S ad triangulum G S P, & quadratum L S ad triangulum L S F: erit

A & reliquum rectangulum G L X ad quadrilaterum G L F P,

B C ut quadratum B F ad triangulum B F R. quadratum autem

D B F æquale eſt rectangulo B F D, triangulumque B R F tri-

E angulo A F H, & quadrilaterum G L F P triangulo A L N. ergo ut rectangulum B F D ad triangulum A F H, ita G L X rectangulum ad triangulum A L N. ſed ut triangulum A F H ad quadratum A F, ita triangulum A L N ad quadratum A L. ex æquali igitur ut rectangulum B F D ad quadratum F A, ita rectangulum G L X ad quadratum A L.



FED. COMMANDINVS.

A ERIT & reliquum rectangulum G L X ad quadrilaterum G L F P, ut qua- (5. ſecundi) dratum B F ad triangulum B F R.) *Ex decima nona quinti, nam rectangulum G L X unà cum quadrato L S æquale eſt quadrato G S. quare ſi à quadrato G S auferatur L S quadratum; relinquitur rectangulum G L X.*

B Vt quadratum B F ad triangulum B F R.) *Deſiderabantur hæc in Græco codice, quæ nos ſuppleuimus.*

C Quadratum autem B F æquale eſt rectangulo B F D.] *Lineæ enim B F, F D æquales ſunt; cùm recta diameter ſit E F, ut ex trigeſima octaua & trigeſima nona ſecundi huius manifeſtè apparet.*

D Triangulumque B R F triangulo A F H.) *Nam ex quadrageſima quinta primi huius triangulum B R F maius eſt, quàm triangulum E H F, triangulo F A E. quare ſequitur triangulum B R F æquale eſſe duobus triangulis E H F, E A F, hoc eſt æquale triangulo A F H.*

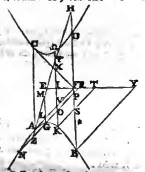
E Et quadrilaterum G L F P triangulo A L N.) *Ex quinta huius.*

THEOREMA XXI. PROPOSITIO XXI.

IISDEM poſitis, ſi in ſectione duo puncta ſumantur; & per ipſa ducantur rectæ lineæ, una quidem contingenti æquidiſtans,

ſtans, altera verò æquidiſtans lineæ tactus coniungenti; quæ & ſibi ipſis & ſectionibus occurrant: erit ut rectangulum contentum lineis, quæ interijciuntur inter occurſum contingentium & ſectiones, ad quadratum contingentis, ita rectangulum contentum lineis, inter ſectiones & linearum occurſum interiectis, ad A
rectangulum, quod lineis ſimiliter ſumptis continetur.

SINT eadem, quæ ſupra: & ſumptis in ſectione punctis G,K, per ea ducantur N Z G O P R, K S T ipſi A F æquidiſtantes; & G L M, K O V I X Ψ Ω æquidiſtantes A C. Dico ut rectangulum B F D ad quadratum F A, ita eſſe K O Ω rectangulum ad rectangulum N O G. Quoniam enim eſt ut quadratum A F ad triangulum AFH, ita quadratum A L ad A L M triangulum, & quadratum Z O ad triangulum Z O Ψ, & quadratum Z G ad triangulum Z G M: erit ut totum quadrarum Z O ad totum triangulum Z O Ψ, ita quadratum Z G ablatum ad ablatum triangulum Z G M. quare & reliquum rectangulum N O G ad reliquum quadrilaterum G O Ψ M erit, ut quadratum A F ad A F H triangulum. ſed triangulum A F H æquale eſt triangulo B Y F, & quadrilaterum G O Ψ M quadrilatero K O R T. ergo ut quadratum A F ad triangulum B Y F, ita rectangulum N O G ad quadrilaterum K O R T. ut autem triangulum B Y F ad quadratum B F, hoc eſt ad rectangulum B F D, ita demonſtratum eſt quadrilaterum K O R T ad rectangulum K O Ω. ex æquali igitur ut A F quadratum ad rectangulum B F D ita rectangulum N O G ad rectangulum K O Ω; & convertendo ut rectangulum B F D ad quadratum F A, ita K O Ω rectangulum ad rectangulum N O G.



B
C
D

FED. COMMANDINVS.

AD rectangulum, quod lineis ſimiliter ſumptis continetur.) *Hæc nos addidimus, quæ in Græco codice deſiderari videbantur, vel alia in eandem ſententiam.* A

Sed triangulum A F H æquale eſt triangulo B Y F.) *Sequitur hoc ex quadrageſima quinta primi huius, ut nos proximè oſtendimus.* B

Et quadrilaterum G O Ψ M quadrilatero K O R T.) *Ex decima ſecunda huius.* C

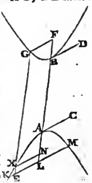
Vt autem triangulum B Y F ad quadratum B F, hoc eſt ad rectangulum B F D, ita demonſtratum eſt quadrilaterum K O R T ad rectangulum K O Ω.) *Demonſtrabimus enim, ut in antecedente, rectangulum K O Ω ad quadrilaterum K O R T ita eſſe, ut quadratum B F, hoc eſt rectangulum B F D ad triangulum B F Y. quare & convertendo.* D

THEOREMA XXII. PROPOSITIO XXII.

SI oppoſitas ſectiones contingant duæ rectæ lineæ, inter ſe æquidiſtantes; ducantur autem aliæ lineæ, quæ & ſibi ipſis & ſectionibus occurrant, una quidem contingenti æquidiſtans, altera

verò

verò æquidiſtans ei, quæ tactus coniungit: erit ut tranſverſum latus ad rectum figuræ, quæ ad lineam tactus coniungentem conſtituitur, ita rectangulum, contentum lineis inter ſectionem & linearum occurſum interiectis, ad rectangulum, quod lineis ſimiliter ſumptis continetur.



SINT oppoſitæ ſectiones A, B; quas contingant rectæ lineæ A C, B D inter ſe æquidiſtantes: & iuncta A B, ducatur E X G ipſi A B æquidiſtans, & K E L M æquidiſtans A C. Dico ut A B ad rectum figuræ latus, ita eſſe G E X rectangulum ad rectangulum K E M. Ducantur enim per X, G lineæ G F, X N ipſi A C æquidiſtantes. Et quoniam A C, B D, æquidiſtantes in-
A ter ſe, ſectiones contingunt: erit & A B diameter; & lineæ
B K L, X N, G F ad ipſam ordinatim applicabuntur. ut igitur A B ad rectum latus, ita B L A rectangulum ad quadratum L K, & rectangulum B N A ad quadratum N X, hoc eſt ad quadratum L E. quare ut totum rectangulum B L A ad totum quadratum K L, ita erit rectangulum B N A abla-
C tum, hoc eſt F A N, quòd N A, B F æquales ſint, ad abla-
D tum quadratum L E. reliquum igitur F L N rectangulum ad reliquum rectangulum K E M erit, ut A B ad rectum latus. eſt autem rectangulum F L N æquale ipſi G E X. ergo ut A B tranſverſum figuræ latus ad rectum, ita G E X rectangulum ad rectangulum K E M.

FED. COMMANDINVS.

A ERIT & A B diameter.) *Nam ſi A B non eſt diameter; per centrum non tranſibit. quare A C, B D convenient inter ſe ſe ad eaſdem partes centri, ex trigeſima prima ſecundi huius; quod quidem fieri non poteſt. ponebantur enim æquidiſtantes.*

B Vt igitur A B ad rectum latus, ita B L A rectangulum ad quadratum L K.) *Ex vigeſima prima primi huius.*

C Quòd N A, B F æquales ſint.) *Eſt enim ut quadratum N X ad rectangulum B N A, ita ſectionis A rectum latus ad tranſverſum: & ut quadratum F G ad rectangulum A F B, ita ſectionis B rectum latus ad tranſverſum. harum autem ſectionum tranſverſum latus idem eſt, videlicet A B: & ſectionis A latus rectum eſt æquale recto lateri ſectionis B; quod apparet ex decima quarta primi huius. ut igitur quadratum N X ad rectangulum B N A, ita quadratum F G ad A F B rectangulum: & permutando ut quadratum N X ad quadratum F G, ita rectangulum B N A ad rectangulum A F B. ſed quadratum N X eſt æquale quadrato F G; quòd linea N X æqualis F G, eſt enim N X G F parallelogrammum. ergo rectangulum B N A rectangulo A F B eſt æquale: & propterea ſequitur lineam N A ipſi F B æqualem eſſe, ex lemmate, quod conſcripſimus in ſextam decimam ſecundi huius.*

21. primi huius.

D Reliquum igitur F L N rectangulum ad reliquum rectangulum K E M erit, ut A B ad rectum latus.) *Rectangulum enim B L A ſuperat rectangulum B N A rectangulo F L N; quod Pappus in quarto lemmate demonſtravit.*

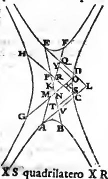
THEOREMA XXIII. PROPOSITIO XXIII.

SI in oppoſitis ſectionibus, quæ coniugatæ appellantur duæ

rectæ

recta lineæ oppoſitas ſectiones contingentes conveniant in quavis ſectione; ducantur autem aliquæ lineæ contingentibus æquidiſtantes, quæ & ſibi ipſis, & alijs ſectionibus oppoſitis occurrant: ut quadrata contingentium inter ſe ſe, ita erit rectangulum contentum lineis, quæ inter ſectiones & occurſum interijciuntur, ad rectangulum, quod lineis ſimiliter ſumptis continetur.

SINT oppoſitæ ſectiones, quæ coniugatæ appellantur A B, C D, E F, G H; ſitque earum centrum K: & ſectiones A B, E F contingant rectæ lineæ A V C L, E Q D L, convenientes in L; & iunctæ A K, E K ad B, F producantur: à puncto autem G ducatur G M N X O ipſi A L æquidiſtans; & à puncto H ducatur H P R X S æquidiſtans E L. Dico ut quadratum E L ad quadratum L A, ita eſſe H X S rectangulum ad rectangulum G X O. Ducatur enim per S linea S T æquidiſtans A L: & per O ducatur O Y ipſi E L æquidiſtans. Quoniam igitur oppoſitarum ſectionum, quæ coniugatæ appellantur, A B, C D, E F, G H diameter eſt B E; & E L ſectionem contingit; ipſique æquidiſtans ducta eſt H S: erit H P æqualis P S, & eadem ratione G M æqualis M O. & quoniam ut quadratum E L ad E V L triangulum, ita eſt quadratum P S ad triangulum P T S, & quadratum P X ad triangulum P N X: erit & reliquũ rectangulum H X S ad quadrilaterum T N X S, ut quadratum E L ad triangulum E V L. ſed E V L triangulum æquale eſt triangulo A L Q, & quadrilaterum T N X S quadrilatero X R Y O. ut igitur quadratum E L ad A L Q triangulum, ita rectangulum H X S ad quadrilaterum X R Y O. ut autem triangulum A Q L ad quadratum A L, ita quadrilaterum X R Y O ad rectangulum G X O. ergo ex æquali ut quadratum E L ad quadratum L A, ita eſt H X S rectangulum ad rectangulum G X O.



5. ſecundi & 19. quinti.

A

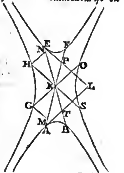
B

C

E V T O C I V S.

HOC theorema plures habet caſus, quemadmodum & alia: verùm quoniam in aliquibus exemplaribus loco theorematum caſus deſcripti inveniuntur, & alia quadam demonſtrationes; nobis viſum eſt ipſas auferre. Vt autem ij, qui in hæc inciderint, ex differenti appoſitione ſententiam meam perpendere poſſint; eas in commentarijs expoſuimus.

ITAQVE contingentibus æquidiſtantes G K O, H K S per centrum, quod ſit K, tranſeant. Dico iam ut quadratum E L ad quadratum L A, ita etiam eſſe rectangulum H K S ad rectangulum G K O. Ducantur enim per G, H lineæ G M, H N, quæ contingentibus æquidiſtent: erit triangulum G K M triangulo A K T æquale. triangulum autem H K N æquale triangulo E K P, & triangulo E K P æquale A K T triangulum. ergo triangulum G K M ipſi H K N æquale erit. ſed ut quadratum E L ad triangulum L E T, ita quadratum G K ad triangulum H K N: atque eſt triangulum L E T æquale triangulo L A P; triangulum verò H K N triangulo G K M. ut igitur quadratum E L ad triangulum



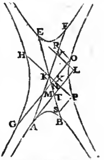
D

E

L A P,

L A P, ita quadratum H K ad triangulum G K M: & ut triangulum L A P ad quadratum L A, ita triangulum G K M ad quadratum G K. ergo ex æquali ut quadratum E L ad quadratum L A, ita quadratum H K, hoc eſt rectangulum H K S ad quadratum G K, hoc eſt ad rectangulum G K O.

IISDEM manentibus, ſi linea H K P, quæ ipſi E L æquidiſtans ducitur, tranſeat per K centrum; G O verò per centrum non tranſeat. Dico ſimiliter ut quadratum E L ad quadratum L A, ita eſſe rectangulum H X P ad rectangulum G X O. Ducantur enim per O, P, contingentibus æquidiſtantes, F O R, P S. Et quoniam triangulum M O R maius eſt, quàm triangulum M N K, triangulo A K T. triangulum autem A K T æquale eſt triangulo K S P. erit M O R triangulum æquale triangulis M N K, K S P. quare ſublato communi, videlicet triangulo M X K, reliquum quadrilaterum X S quadrilatero X R eſt æquale. quòd cùm ſit ut quadratum E L ad triangulum E L T, ita quadratum K P ad triangulum K P S, & ita quadratum K X ad triangulum K X N: erit ut quadratum E L ad E L T triangulum, ita reliquum, rectangulum ſcilicet H X P ad quadrilaterum X S. eſt autem triangulum E L T æquale triangulo A L V, & quadrilaterum X R quadrilatero X S. ergo ut quadratum E L ad triangulum G A L V, ita rectangulum H X P ad quadrilaterum X S. & eadem ratione ut triangulum A L V ad quadratum A L, ita quadrilaterum X S ad rectangulum G X O. ex æquali igitur ut quadratum E L ad quadratum L A, ita rectangulum H X P ad rectangulum G X O.



FED. COMMANDINVS.

A SED E V L triangulum æquale eſt triangulo A L Q.) *Ex quarta huius.*

B Et quadrilaterum T N X S quadrilatero X R Y O.) *Hoc nos ſupra demonſtrauimus in commentarijs in quintam decimam propoſitionem huius libri.*

C Vt autem triangulum A Q L ad quadrilaterum A L, ita quadrilaterum X R Y O ad rectangulum G X O.) *Eodem enim modo, quo ſupra, demonſtrabimus rectangulum G X O ad quadrilaterum X R Y O ita eſſe, ut quadratum A L ad A L Q triangulum. quare & conuertendo quadrilaterum X R Y O ad rectangulum G X O erit, ut triangulum A L Q ad quadratum A L.*

IN ALIAS DEMONSTRATIONES, QVÆ AB EVTOCIO AFFERVNTVR.

D ERIT triangulum G K M triangulo A K T æquale; triangulum autem H K N æquale triangulo E K P.] *Hoc enim ſupra demonſtratum eſt in quinta decima propoſitione huius libri.*

E Et triangulo E K P æquale A K T triangulum.] *Ex quarta huius.*

F Et quoniam triangulum M O R maius eſt, quàm triangulum M N K, triangulo A K T.) *Ex eadem quinta decima huius.*

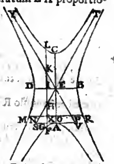
G Et eadem ratione ut triangulum A L V ad quadratum A L, ita quadrilaterum X S ad rectangulum G X O.) *Vt enim quadratum A L ad triangulum A L V, ita eſt quadratum M O ad triangulum M O R: & ita quadratum M X ad triangulum M X K. quare reliquum rectangulum G X O ad quadrilaterum X R erit, ut quadratum A L ad triangulum A L V: & conuertendo quadrilaterum X R, hoc eſt X S ad rectangulum G X O, ut triangulum A L V ad quadratum A L.*

THE-

THEOREMA XXIV. PROPOSITIO XXIV.

SI in oppoſitis ſectionibus, quas coniugatas appellamus, à centro ad ſectiones ducantur duæ rectæ lineæ; quarum una quidem ſit tranſverſa diameter, altera verò recta; & ducatur aliæ lineæ his diametris æquidiſtantes, quæ & ſibi ipſis & ſectionibus occurrant; ita ut occurſus ſit in loco inter quatuor ſectiones intermedio: rectangulum, contentum portionibus lineæ diametro tranſverſæ æquidiſtantis, unà cum eo, ad quod rectangulum ex portionibus lineæ æquidiſtantis rectæ diametro proportionem habet eandem, quam diametri rectæ quadratum ad quadratum tranſverſæ, æquale erit duplo quadrati, quod à dimidia tranſverſæ diametri conſtituitur.

SINT oppoſitæ ſectiones, quas coniugatas appellamus, A,B,C,D, quarum centrum E: perque E ducatur A E C tranſverſa diameter, & D E B recta; & ducantur F G H I K L, M N X O P R æquidiſtantes ipſis A C, D B, quæ in puncto X conveniant: ſit autem X prius intra angulum S E V, vel Y E T. Dico rectangulum F X L unà cum eo, ad quod rectangulum M X R proportionem habet eandem, quam D B quadratum ad quadratum A C, æquale eſſe duplo quadrati A E. Ducantur enim aſymptoti ſectionum S E T, Y E V: & per A ducatur S G A V ſectionem contingens. Quoniam igitur rectangulum S A V æquale eſt quadrato D E: erit ut rectangulum S A V ad quadratum E A, ita quadratum D E ad E A quadratum. rectangulum autem S A V ad quadratum E A proportionem habet compoſitam ex proportione S A ad A E & ex proportione V A ad A E. ſed ut S A ad A E, ita N X ad X H: & ut V A ad A E, ita P X ad X K. quare proportio quadrati D E ad quadratum E A componitur ex proportione N X ad X H & proportione P X ad X K. proportio autem rectanguli P X N ad rectangulum K X H compoſita eſt ex eiſdem proportionibus. ut igitur quadratum D E ad E A quadratum, ita rectangulum P X N ad rectangulum K X H: & propterea ut quadratum D E ad quadratum E A, ita quadratum D E unà cum rectangulo P X N ad quadratum E A unà cum rectangulo K X H. atque eſt quadratum D E æquale rectangulo P M N, hoc eſt rectangulo R N M; & quadratū E A æquale rectangulo K F H, hoc eſt L H F. quare ut quadratum D E ad quadratum E A, ita rectangulum P X N unà cum rectangulo R N M ad rectangulum K X H unà cum rectangulo L H F. rectangulum autem P X N unà cum rectangulo R N M æquale eſt rectangulo R X M. ergo ut quadratum D E ad quadratum E A, ita R X M rectangulum ad rectangulum K X H unà cum rectangulo K F H. itaque demonſtrare oportet rectangulum F X L unà cum rectangulo K X H, & rectangulo K F H æquale duplo quadrati E A. commune auferatur quadratū A E, hoc eſt rectangulum K F H. reliquum igitur rectangulum K X H unà cum rectangulo L X F demonſtrandum eſt æquale quadrato A E: quod quidem ita ſe habet. nam rectangu-



A

23. ſexti.

4 ſexti.

23. ſexti.

12. quinti.

B

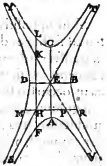
C.

D

E

lum K X H unà cum rectangulo L X F æquale eſt rectangulo K F H, hoc eſt A E quadrato.

Conveniant deinde F L, M R in una aſymptoton ad punctum H: erit rectangulum F H L æquale quadrato A E, & rectangulum M H R æquale quadrato D E. quare ut quadratum D E ad quadratum E A, ita rectangulum M H R ad rectangulum F H L: & propterea oſtendendum eſt duplum rectanguli F H L æquale duplo quadrati A E; illud verò ita eſſe perſpicuè conſtat.

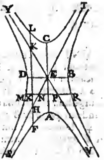


F Sit poſtremò X intra angulum S E Y, vel V E T: erit ſimiliter ob coniunctionem proportionum ut quadratum D E ad quadratum E A, ita P X N rectangulum ad rectangulum K X H. ſed quadrato D E rectangulum P M N, hoc eſt R N M eſt æquale; & quadrato A E æquale rectangulum L H F. ergo ut rectangulum R N M ad rectangulum L H F, ita ablatum P X N rectangulum ad ablatum rectangulum K X H. reliquum igitur rectangulum R X M ad

G reliquum, videlicet ad exceſſum, quo quadratum A E excedit rectangulum K X H, eſt ut quadratum D E ad qua-

H dratum E A. itaque demonſtrare oportet rectangulum F X L unà cum exceſſu, quo quadratum A E excedit K X H rectangulum, æquale eſſe duplo quadrati A E. commune auferatur A E quadratum, hoc eſt rectangulum F H L.

K ergo demonſtrandum eſt reliquum rectangulum K X H unà cum exceſſu, quo quadratum A E excedit rectangulum K X H, quadrato A E æquale eſſe: quod quidem ita eſt, nam minus, hoc eſt rectangulum K X H unà cum exceſſu eſt æquale maiori, videlicet quadrato A E.



FED. COMMANDINVS.

A QVONIAM igitur rectangulum S A V æquale eſt quadrato D E.] *Ex quinquageſima ſexta primi, & prima ſecundi huius. utrunque enim eſt æquale quartæ parti figuræ, quæ ad diametrum A C conſtituitur.*

B Atque eſt quadratum D E æquale rectangulo P M N.] *Ex undecima ſecundi huius.*

C Hoc eſt rectangulo R N M.) *Sunt enim lineæ M N, P R inter ſe æquales, ex octaua ſecundi huius.*

D Rectangulum autem P X N unà cum rectangulo R N M æquale eſt rectangulo R X M.) *Hoc nos demonſtravimus in commentarijs in ſextum lemma Pappi.*

E Itaque demonſtrare oportet rectangulum F X L unà cum rectangulo K X H.] *Eſt enim quadratum D B ad quadratum A C, ut quadratum D E ad quadratum E A, quod utrunque utriuſque quadruplum ſit. ergo ut quadratum D B ad quadratum A C, ita rectangulum R X M ad rectangulum K X H unà cum rectangulo K F H. rectangulum autem K X H unà cum rectangulo L X F eſt æquale rectangulo K F H, hoc eſt quadrato A E; quod nos in quintum Pappi lemma demonſtravimus. ſi igitur utrique addatur commune quadratum A E; erit rectangulum F X L unà cum rectangulo K X H & quadrato A E, hoc eſt rectangulo K F H æquale rectangulo K F H & quadrato A E, hoc eſt duplo quadrati A E. quod quidem demonſtrare oportebat.*

Erit

Erit ſimiliter ob coniunctionem proportionum ut quadratum D E ad quadra- F
tum E A.] *Hoc demonſtrabitur eadem prorſus ratione, qua ſupra uſi fuimus.*

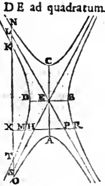
Reliquum igitur rectangulum R X M ad reliquum, videlicet ad exceſſum, quo G
quadratum A E excedit rectangulum K X H.] *Nam rectangulum P M N, hoc eſt R N M excedit P X N rectangulum, rectangulo R X M, ut demonſtravimus. quare reliquum rectangulum R X M ad reliquum, quo rectangulum L H F, hoc eſt quadratum A E excedit rectangulum K X H, erit ut rectangulum R N M ad rectangulum L H F, hoc eſt ut quadratum D E ad quadratum E A, videlicet ut quadratum D B ad quadratum A C.*

Eſt ut quadratum D E ad quadratum E A.) *Hæc nos addidimus, quæ deſiderari* H
videbantur.

Ergo demonſtrandum eſt reliquum rectangulum K X H unà cum exceſſu, quo K
quadratum A E excedit rectangulum K X H quadrato A E æquale eſſe.) *Rectangulum enim F X L excedit rectangulum F H L, rectangulo K X H.*

THEOREMA XXV. PROPOSITIO XXV.

IISDEM poſitis, ſit linearum ipſis A C, B D æquidiſtantium occurſus in una ſectionum D, B; atque in puncto X, ut poſitum eſt. Dico rectangulum contentum portionibus lineæ, quæ tranſverſæ diametro æquidiſtat, videlicet O X N maius eſſe, quàm illud, ad quod rectangulum ex portionibus lineæ æquidiſtantis rectæ diametro, hoc eſt R X M, eandem proportionem habet, quam rectæ diametri quadratum ad quadratum tranſverſæ, duplo quadrati eius, quod à dimidia tranſverſæ diametri conſtituitur.



EST enim propter eandem rationem ut quadratum D E ad quadratum A
E A, ita rectangulum P X H ad rectangulum S X L. qua- B
dratum autem D E æquale eſt rectangulo P M H, & qua- C
dratum E A æquale rectangulo L K S. ergo ut quadratum D E ad quadratum E A, ita P M H rectangulum ad rectangulum L K S. itaque quoniam ut totum rectan-
gulum P X H ad totum L X S, ita ablatum rectangulum D
P M H ad ablatum L K S, hoc eſt ad L T S: erit & reli- E
quum R X M ad reliquum T X K, ut D E quadratum ad quadratum E A. oſtendere igitur oportet rectangulum O X N maius eſſe, quàm rectangulum T X K duplo
quadrati A E. commune auferatur T X K. ergo oſtenden- F
dum relinquitur rectangulum O T N æquale duplo qua- G
drati A E: hoc autem ita eſſe manifeſto apparet.

FED. COMMANDINVS.

EST enim propter eandem rationem ut quadratum D E ad quadratum E A.] A
Ex demonſtratis in antecedente.

Quadratum autem D E æquale eſt rectangulo P M H.) *Ex undecima ſecundi* B
huius, ut dictum eſt.

Et quadratum E A æquale rectangulo L K S.) *Ex decima ſecundi huius: ita ve-* C
rò corrigendum eſt. nam in Græco codice legitur ΛΟΣ, *& ita inferius in multis locis.*

D Ita ablatum rectangulum P M H ad ablatum L K S, hoc eſt ad L T S.] *Nos hæc ita reſtituimus, in Græco enim codice legebatur:* οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ὑπὸ Π Μ Θ πρὸς ἀφαιρεθὲν ὑπὸ Λ Ο Σ τουτέστι τὸ ὑπὸ Υ Σ Ο, *hoc eſt ita ablatum rectangulum P M H ad ablatum L O S, hoc eſt ad T S O.*

E Erit & reliquum R X M ad reliquum T X K, ut D E quadratum ad quadratũ E A.) *Nam rectangulum P X H ſuperat rectangulum R X M, rectangulo P M H, ex quarto lemmate Pappi: rectangulum verò L X S, ex ſexto lemmate eiuſdem, ſuperat rectangulum T X K, rectangulo L K S.*

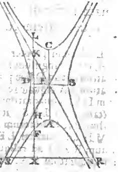
F Commune auferatur T X K. ergo oſtendendum relinquitur rectangulum OTN

ex 2. parte 5. lem. æquale duplo quadrati A E.] *Rectangulum enim O X N eſt æquale rectangulo T X K unà cum rectangulo O T V.*

G Hoc autem ita eſſe manifeſtò apparet.) *Ex vigeſima tertia ſecundi huius.*

THEOREMA XXVI. PROPOSITIO XXVI.

QVOD ſi æquidiſtantium occurſus ad punctum X ſit in una ſectionum A,C, ut poſitum eſt: rectangulum, quod continetur portionibus lineæ æquidiſtantis tranſverſæ diametro, hoc eſt L X F minus erit, quàm illud, ad quod rectangulum portionibus alterius lineæ contentum, hoc eſt R X G eandem proportionem habet, quàm rectæ diametri quadratum ad quadratum tranſverſæ, duplo quadrati eius, quod à dimidia tranſverſæ diametri conſtituitur.



QVONIAM enim propter eadem, quæ priùs dicta

A ſunt, ut quadratum D E ad quadratum E A, ita eſt V

B X S rectangulum ad rectangulum K X H: habebit totum rectangulum R X G ad rectangulum K X H unà cum quadrato A E proportionem eandem, quàm rectæ diametri quadratum ad quadratum tranſverſæ. ergo demonſtrare oportet rectangulum L X F minus eſſe, quàm rectangulum K X H una cum quadrato A E, duplo A E quadrati. commune auferatur quadratum A E. reliquum igitur rectangulum L X F demonſtrandum eſt minus, quàm K X H, quadrato A E, hoc eſt rectangulo

C L H F: quod quidem ita ſe habet. nam rectangulum L H F unà cum L X F æquale eſt rectangulo K X H.

FED. COMMANDINVS.

A VT quadratum D E ad quadratum E A, ita eſt V X S rectangulum ad rectangulum K X H. *Ob compoſitionem videlicet proportionum.*

B Habebit totum rectangulum R X G ad rectangulum K X H unà cum quadrato A E proportionem eandem, quàm rectæ diametri quadratum ad quadratum tranſverſæ.] *Quoniam enim eſt ut quadratum D E ad quadratum E A, ita rectan-*

12. quinti. *gulum V X S ad rectangulum K X H: erit quoque ut quadratum D E ad quadratum E A, ita quadratum D E unà cum rectangulo V X S ad quadratum E A unà cum rectangulo K X H. ſed quadrato D E æquale eſt rectangulum V G S, hoc eſt R S G. quare ut quadratum D E ad quadratum E A, ita rectangulum V X S unà cum R S G rectangulo ad rectan-*

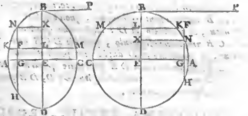
ctangulum K X H unà cum quadrato A E. rectangulum autem V X S unà cum rectangulo R S G eſt æquale rectangulo R X G, ex quarto lemmate. ut igitur quadratum D E ad quadratum E A, hoc eſt ut recta diametri quadratum ad quadratum tranſverſa, ita rectangulum R X G ad rectangulum K X H unà cum A E quadrato.

Nam rectangulum L H F unà cum L X F æquale eſt rectangulo K X H.] *Ex* C *quarto lemmate Pappi.*

THEOREMA XXVII. PROPOSITIO XXVII.

SI in ellipſi, vel circuli circunferentia coniugatæ diametri ducantur; quarum altera quidem ſit recta, altera verò tranſverſa; & ducantur duæ rectæ lineæ diametris æquidiſtantes, quæ & ſibi ipſis & ſectioni occurrant: quadrata ex portionibus lineæ æquidiſtantis tranſverſæ diametro, quæ inter ſectionem & linearum occurſum interijciuntur, aſſumentia figuras ex portionibus lineæ, quæ rectæ diametro æquidiſtat, inter linearum occurſum & ſectionem interiectis, ſimiles & ſimiliter deſcriptas ei, quæ ad rectam diametrum conſtituitur, quadrato tranſverſæ diametri æqualia erunt.

SIT ellipſis, vel circuli circunferentia A B C D, cuius centrum E: ducanturque ipſius duæ coniugatæ diametri, recta quidem A E C, tranſverſa verò B E D: & ducantur K F L M, N F G H; quæ ipſi A C, B D æquidiſtent. Dico quadrata N F, F H, aſſumentia figuras ex K F, F M ſimiles & ſimiliter deſcriptas ei, quæ fit ad A C, quadrato B D æqualia eſſe. Ducatur enim à puncto N linea N X æquidiſtans A E; quæ ad B D ordinatim applicata erit: & B P ſit rectum figuræ latus. Quoniam igitur ut B P ad A C, ita eſt A C ad B D: erit ut P B ad B D, A cor. 20. sexti.
ita A C quadratum ad quadratum B D. quadratum autem B D eſt æquale figuræ, quæ ad A C conſtituitur. B
ergo ut P B ad B D, ita quadratum A C ad figuram, quæ eſt ad A C. ſed ut quadratum A C ad figuram, quæ ad A C, ita quadratum N X ad figurã, quæ fit ab N X, ſimilem ei, quæ ad A C: eſt autem & ut P B ad B D, ita N X quadratum ad rectangulum B X D. C

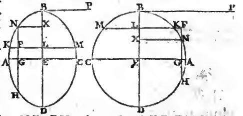


quare figura, quæ fit ab N X, hoc eſt ab F L, ſimilis ei, quæ ad A C, rectangulo B X D eſt æqualis. eodem modo demonſtrabimus figuram, quæ fit a K L, ſimilem illi, quæ ad A C, rectangulo B L D æqualem eſſe. & quoniam recta linea N H ſecatur in partes æquales in G, & in partes inæquales in F: quadrata H F, F N dupla ſunt quadratorum H G, G F hoc eſt N G, G F. eadem quoque ratione quadrata M F, F K quadratorum K L, L F ſunt dupla: & figuræ, quæ fiunt ab M F, F K, ſimiles ei, quæ ad A C, duplæ ſunt figurarum ſimilium, quæ à K L, L F. figuræ autem, quæ fiunt à K L, L F rectangulis B L D, B X D ſunt æquales: & quadrata N G, G F æqualia ſunt quadratis X E, E L. ergo quadrata

(margin: 9. quinti. — D)

Digitized by Google

drata N F, F H unà cum figuris K F, F M ſimilibus ei, quæ ad A C, dupla ſunt
5.secundi rectangulorum B L D, B X D, & quadratorum X E, E L. itaque quoniam recta linea B D ſecatur in partes æquales in E, & in partes inæquales in X: rectangulum B X D unà cum X E quadrato æquale eſt quadrato B E; ſimiliter & rectangulum B L D unà cum quadrato L E æquale eſt B E quadrato. quare rectangula B X D, B L D, & quadrata X E, L E æqualia ſunt duplo quadrati B E. quadrata igitur N F, F H unà cum figuris K F, F M ſimilibus ei, quæ ad A C, dupli quadrati B E ſunt dupla. atque eſt quadratum B D duplū dupli quadrati B E. ergo quadrata N F, F H aſſumentia figuras K F, F M ſimiles ei, quæ ad A C, quadrato B D æqualia erunt.



FED. COMMANDINVS.

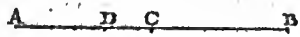
A QVONIAM igitur ut B P ad A C, ita eſt A C ad B D.) *Ex diffinitione ſecunda diametri, qua mediam proportionem habet inter figura latera.*

B Quadratum autem B D eſt æquale figuræ, quæ ad A C conſtituitur.) *Habet enim B D mediam proportionem inter latera figura, qua fit ad A C, ex decima quinta primi huius.*

C Eſt autem & ut P B ad B D, ita N X quadratum ad quadratum B X D.) *Ex vigeſima prima primi huius.*

D Et quoniam recta linea N H ſecatur in partes æquales in G, & in partes inæquales in F: quadrata H F, F N dupla ſunt quadratorum H G, G F.) *Hoc demonſtravit Euclides in ſecundo libro Elementorum, propoſitione nona: ſed & aliter demonſtrare poſſumus hoc pacto.*

Secetur recta linea A B in partes æquales ad punctum C, & in partes inæquales ad D. Dico quadrata A D, D B quadratorum D C, C B dupla eſſe. Quoniam enim A C, C B æquales ſunt: erit A D linea, qua B C ipſam C D ſuperat. ergo ex iis, quæ demonſtravimus in trigeſimam tertiam propoſitionem primi huius, quadrata D C, C B æqualia ſunt rectangulo, quod bis D C B continetur, & quadrato A D: iccircoque quadrata D C, C B unà cum rectangulo, quod bis D C B continetur, & quadrato A D dupla ſunt quadratorum



4.secundi. *D C, C B. ſed quadratum D B eſt æquale quadratis D C, C B, & rectangulo, quod bis D C B continetur. quadrata igitur A D, D B quadratorum D C, C B ſunt dupla. quod demonſtrare oportebat.*

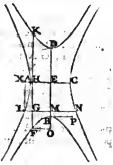
THEOREMA XXVIII. PROPOSITIO XXVIII.

SI in oppoſitis ſectionibus, quas coniugatas appellamus, coniugatæ diametri ducantur; ut earum altera recta ſit, altera tranſverſa; & ducantur duæ rectæ lineæ diametris æquidiſtantes, quæ & ſibi ipſis & ſectionibus occurrant: quadrata ex portionibus lineæ æquidiſtantis rectæ diametro, quæ inter linearum occurſum

& ſe-

ctiones interijciuntur, ad quadrata ex portionibus alterius lineæ, quæ tranſverſæ diametro æquidiſtat, inter ſectiones & occurſum linearum interiectis, eandem proportionem habent, quam rectæ diametri quadratum ad quadratum tranſverſæ.

SINT oppoſitæ ſectiones, quæ coniugatæ appellantur, A, B, C, D; quarum diameter quidem recta ſit A E C, tranſverſa verò B E D: & ipſis æquidiſtantes ducantur F G H K, L G M N; quæ & ſibi ipſis & ſectionibus occurrant. Dico quadrata L G, G N ad quadrata F G, G K eandem proportionem habere, quàm A C quadratum ad quadratum B D. A punctis enim L, F ordinatim applicentur L X, F O; quæ æquidiſtantes erunt diametris A C, B D: & à puncto B ducatur ipſius B D rectum latus B P. Itaque con- A
ſtat ut P B ad B D, ita eſſe quadratum A C ad B D qua-
dratum, & quadratum A E ad quadratum E B, & qua- B C
dratum F O ad rectangulum B O D, & rectangulum C D
X A ad quadratum L X. eſt igitur ſicut unum antece- E
dentium ad unum conſequentium, ita antecedentia omnia ad omnia conſequentia. quare ut quadratum A C ad quadratum B D, ita rectangulum C X A unà cum quadrato A E & quadrato O F, hoc eſt E H, ad rectangulum D O B unà cum quadrato B E, & quadrato L X, hoc eſt M E. ſed rectangulum C X A unà cum 6.secundi
quadrato A E æquale eſt quadrato X E & rectangulum D O B una cum quadrato B E æquale quadrato O E. ergo ut A C quadratum ad quadratum B D, ita ſunt quadrata X E, E H ad quadrata O E, E M, hoc eſt quadrata L M, M G
ad quadrata F H, H G. quadratorum autem L M, M G dupla ſunt quadrata F
L G, G N, ut demonſtratum eſt: & quadratorum F H, H G quadrata F G, G K ſunt dupla. ut igitur quadratum A C ad quadratum B D, ita L G, G N quadrata ad quadrata F G, G K.



FED. COMMANDINVS.

ITAQVE conſtat, ut P B ad B D, ita eſſe quadratum A C ad B D quadratum.] A
Eſt enim A C proportionalis inter P B, B D, ex diffinitione ſecunda diametri. quare per corollarium decima nona ſexti ut P B ad B D, ita quadratum P B ad quadratum A C, & ita quadratum A C ad B D quadratum.

Et quadratum A E ad quadratum E B.] *Ex quinta decima quinti.* B

Et quadratum F O ad rectangulum B O D.) *Nam ex vigeſima prima primi huius* C
ut figura rectum latus ad tranſverſum, hoc eſt ut P B ad B D, ita F O quadratum ad rectangulum B O D.

Et rectangulum C X A ad quadratum L X.) *Eſt enim ex eadem vigeſima prima* D
primi huius ut ſectionis A tranſverſum latus ad rectum, hoc eſt ut quadratum A C ad quadratum B D, ita rectangulum C X A ad quadratum L X.

Eſt igitur ſicut unum antecedentium ad unum conſequentium, ita anteceden- E
tia omnia ad omnia conſequentia.) *Ex decima ſecunda quinti.*

Quadratorum autem L M, M G dupla ſunt quadrata N G, G L, ut de- F
monſtratum eſt.) *In ſecundo libro Elementorum propoſitione nona, ut diximus.*

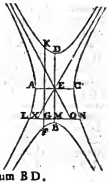
THEOREMA XXIX. PROPOSITIO XXIX.

IISDEM poſitis, ſi linea rectæ diametro æquidiſtans ſecet aſym-

ptotos

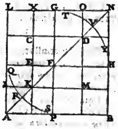
ptotos; quadrata ex portionibus ipſius, quæ inter linearum occurſum, & aſymptotos interijciuntur, aſſumentia dimidium quadrati facti à recta diametro, ad quadrata ex portionibus lineæ, quæ tranſverſæ diametro æquidiſtat, inter occurſum linearum & aſymptotos interiectis, eandem proportionem habent, quàm rectæ diametri quadratum ad quadratum tranſverſæ.

SINT eadem, quæ ſupra: & linea L N ſecet aſymptotos in punctis X, O. Demonſtrandum eſt, quadrata
A X G, G O, aſſumentia dimidium quadrati A C, hoc
B eſt duplum quadrati E A, hoc eſt duplum rectanguli L X N, ad quadrata F G, G K eandem proportionem habere, quàm A C quadratum ad quadra-
C tum B D. Quoniam enim L X æqualis eſt O N: quadrata L G, G N ſuperant quadrata X G, G O, duplo rectanguli L X N. ergo quadrata X G, G O unà cum duplo quadrati A E æqualia ſunt quadratis L G, G N.
D ſed L G, G N quadrata ad quadrata F G, G K eandem habent proportionem, quàm quadratum A C ad quadratum B D. quadrata igitur X G, G O unà cum duplo quadrati E A ad quadrata F G, G K eandem proportionem habent, quàm A C quadratum ad quadratum B D.



EVTOCIVS.

C QVONIAM enim L X æqualis eſt O N: quadrata L G, G N ſuperant quadrata X G, G O, duplo rectanguli L X N.] *Sit recta linea L N; auferanturque ab ipſa æquales L X, N O, & figura deſcribatur: manifeſtum eſt ob ſimilitudinem, & propterea quòd linea L X eſt æqualis N O, quadrata L C, D N, A K, M B inter ſe æqualia eſſe. Quoniam igitur quadrata, quæ ſiunt ex L Ǵ, G N, ſunt quadrata A F, F N. & quæ ex Ǵ X, Ǵ O, ſunt K F, F D, ſequitur ut quadrata ex L G, G N ſuperent quadrata ex G X, Ǵ O, gnomonibus Q R S, T V Y. quòd cùm rectangulum Ǵ D ſit æquale rectangulo M P, & rectangulum E I ipſi M H, erunt gnomones Q R S, T V Y æquales rectangulis A M, D B. ſed A M eſt æquale L D; rectangula verò L D, D B ſunt, quæ L X N, hoc eſt L O N continentur. ergo quadrata ex L G, G N, hoc eſt A F, F N ſuperant quadrata ex G X, Ǵ O, hoc eſt K F, F D, duplo rectanguli L X N, hoc eſt rectangulis L D, D B.*



FED. COMMANDINVS.

A ASSVMENTIA dimidium quadrati A C, hoc eſt duplum quadrati E A.) *Cùm enim linea A C dupla ſit ipſius A E: erit quadratum A C quadrati A E quadruplum, ex vigeſima ſexti.*

B Hoc eſt duplum rectanguli L X N.) *Ex decima e undi huius, & ex diffinitione ſecunda diametri.*

Quo-

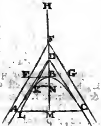
Quoniam enim L X æqualis eſt O N: quadrata L G, G N ſuperant quadrata X G, G O duplo rectanguli L X N.] *Conſtat etiam hoc ex octavo lemmate Pappi.*

Sed L G, G N quadrata ad quadrata F G, G K eandem habent proportionem, quam quadratum A C ad quadratum B D.] *Ex antecedente.*

THEOREMA XXX. PROPOSITIO XXX.

SI hyperbolen contingentes duæ rectæ lineæ ſibi ipſis occurrant; & per tactus linea producatur; per occurſum verò ducatur linea uni aſymptoton æquidiſtans; ſectionemque & lineam coniungentem tactus ſecans: quæ interijcitur inter occurſum & lineam tactus coniungentem, à ſectione bifariam dividetur.

SIT hyperbole A B C; quam contingant rectæ lineæ A D, D C; aſymptoti verò ſint E F, F G: & iuncta A C, ducatur per D linea D K L æquidiſtans E F. Dico D K ipſi K L æqualem eſſe. Iungatur enim F D B M; & ex utraque parte producatur, ut ſit F H æqualis F B: & per B, K ducantur B E, K N æquidiſtantes A C, quæ ordinatim applicatæ erunt. Et quoniam triangulum F E B ſimile eſt triangulo D K N: erit ut quadra- 4. sexti.
tum D N ad quadratum N K, ita quadratum F B ad B E 22
quadratum. ut autem quadratum F B ad quadratum B E, A
ita linea H B ad rectum latus. quare ut quadratum D N ad
quadratum N K, ita H B ad rectum latus ſed ut H B ad re- B
ctum latus, ita rectangulum H N B ad quadratum N K. ut
igitur quadratum D N ad quadratum N K, ita H N B re-
ctangulum ad quadratum N K. ergo rectangulum H N B 9. quinti.
quadrato D N eſt æquale. eſt autem & rectangulum M F D C
æquale quadrato F B; propterea quòd linea A D ſectionem
contingit, & A M ordinatim eſt applicata. quare rectangulum H N B unà cum D
quadrato B F æquale eſt rectangulo M F D unà cum D N quadrato. ſed rectan- E
gulum H N B una cum quadrato B F eſt æquale quadrato F N. ergo & rectangulum M F D una cum quadrato D N æquale eſt quadrato F N: iccircoque linea F
D M ad punctum N bifariam ſecatur, adiunctam habens D F. & K N, L M æ-
quidiſtantes ſunt. linea igitur D K ipſi K L eſt æqualis. 2 sexti.



FED. COMMANDINVS.

VT autem quadratum F B ad quadratum B E, ita linea H B ad latus rectum.] *Ex demonſtratis in prima ſecundi huius.* A

Sed ut H B ad rectum latus, ita rectangulum H N B ad quadratum N K.] *Ex vigeſima prima primi huius.* B

Eſt autem & rectangulum M F D æquale quadrato F B; propterea quòd linea A D ſectionem contingit, & A M ordinatim eſt applicata.) *Ex trigeſima ſeptima primi huius.* C

Quare rectangulum HNB unà cum quadrato B F æquale eſt rectangulo MFD unà cum D N quadrato.) *Si enim æqualia addantur, quæ fient æqualia erunt.* D

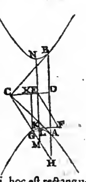
Sed rectangulum H N B unà cum quadrato B F eſt æquale quadrato F N.] *Ex ſexta ſecundi Elementorum.* E

Iccircoque linea D M ad punctum N bifariam ſecatur, adiunctam habens D F.] *Ex nono lemmate Pappi, & iis quæ in ipſum conſcripſimus.* F

THEOREMA XXXI. PROPOSITIO XXXI.

SI oppoſitas ſectiones duæ rectæ lineæ contingentes ſibi ipſis occurrant; & per tactus linea producatur; per occurſum verò ducatur linea aſymptoto æquidiſtans, quæ ſectionem & lineam tactus coniungentem ſecet: linea inter occurſum, & eam, quæ tactus coniungit, interiecta à ſectione bifariam diuidetur.

SINT oppoſitæ ſectiones A, B; & contingentes lineæ A C, C B; iunctaque A B producatur: aſymptotos verò ſit E F; & per C ducatur C G H, ipſi E F æquidiſtans. Dico C G æqualem eſſe G H. Iungatur enim C E, & ad D producatur: & per E, G ducantur E K M N, G X ipſi A B æquidiſtantes; & per K, G ducantur K F, G L æquidiſtantes C D. Quoniam igitur triangulum K F E ſimile eſt triangulo M L G: ut quadratum E K ad quadra-



4. sexti. 22

A tum K F, ita erit M L quadratum ad quadratum L G. ſed ut

9. quinti. quadratum E K ad quadratum K F, ita demonſtratum eſt N L K rectangulum ad quadratum L G. ergo rectangulum N L K quadrato M L eſt æquale. commune apponatur quadratum K E. rectangulum igitur N L K una cum quadra-

6. ſecundi to K E, hoc eſt quadratum L E, hoc eſt G X æquale eſt

B quadratis M L, K E. ut autem quadratum G X ad quadrata M L, K E, ita quadratum X C ad quadrata L G, K F.

14. quinti. ex quibus ſequitur quadratum X C æquale eſſe quadratis G L, K F. atque eſt quadratum G L æquale quadrato X E:

C D & quadratũ K F æquale quadrato dimidiæ ſecundæ diametri, hoc eſt rectangulo C E D. quadratum igitur C X quadrato X E, & rectangulo C E D eſt æqua-

E le: ac propterea linea C D in partes quidem æquales ſecatur ad punctum X, in

1. sexti. partes verò inæquales ad E. & D H æquidiſtat G X. ergo C G ipſi G H æqualis erit.

EVTOCIVS.

POSSVMVS etiam hoc theorema demonſtrare, ut antecedens; ſi duæ rectæ lineæ ſectionem unam contingant: ſed quoniam omnino idem eſt, atque illud, quod in una hyperbola demonſtratum fuit; demonſtratio eadem repetatur.

FED. COMMANDINVS.

A SED ut quadratum E K ad quadratum K F, ita demonſtratum eſt N L K rectangulum ad quadratum L G.) *In antecedente ſcilicet.*

B Vt autem quadratum G X ad quadrata M L, K E, ita quadratum X C ad quadrata L G, K F.) *Nam ob ſimilitudinem triangulorum C X G, G L M, F K E, ut linea G X ad X C, ita erit E K ad K F: & permutando ut G X ad E K, ita X C ad K F. & eadem ratione demonſtrabitur ut M L ad E K, ita L G ad K F. quare & componendo ut M L, E K ad E K, ita L G, K F ad K F: conuertendoque ut E K ad M L, E K, ita K F ad L G, K F. quoniam igitur ut G X ad E K, ita X C ad K F. & ut E K ad M L, E K, ita K F ad L G, K F. erit ex æquali ut G X ad M L, E K,*

22. sexti. *ita X C ad L G, K F. ergo ut quadratum G X ad M L, E K quadrata, ita quadratum X C ad quadrata L G, K F.*

C Et quadratum K F æquale quadrato dimidiæ ſecundæ diametri.] *Quadratum enim*

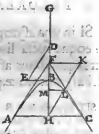
enim K F eſt æquale quartæ parti figuræ, quæ fit ad diametrum K N, ex prima ſecundi huius: & cum ſecunda diameter mediam proportionem habeat inter figuræ latera; erit dimidiæ ipſius quadratum itidem æquale quartæ parti figuræ.

Hoc eſt rectangulo C E D.) *Ex trigeſima octava primi huius.* D

Ac propterea linea C D in partes quidem æquales ſecatur ad punctum X, in partes verò inæquales ad E.) *Ex decimo lemmate Pappi.* E

THEOREMA XXXII. PROPOSITIO XXXII.

SI hyperbolen duæ rectæ lineæ contingentes ſibi ipſis occurrant; & per tactus linea producatur; per occurſum verò contingentium ducatur linea, tactus coniungenti æquidiſtans; & per punctum, quod coniungentem tactus bifariam ſecat, ducatur æquidiſtans alteri aſymptoton: quæ inter dictum punctum & lineam æquidiſtantem interijcitur, à ſectione bifariam dividetur.



SIT hyperbole A B C, cuius centrum D, & aſymptotos D E: contingant autem ſectionem lineæ A F, F C; iungaturque C A, & F D; & ad G, H producatur. erit A H æqualis H C. itaque per F ducatur F K ipſi A C æquidiſtans: & per H, H L K æquidiſtans D E. Dico K L ipſi L H æqualem eſſe. Ducantur enim per B, L lineæ B E, L M, quæ æquidiſtent A C. Iam ex ijs, quæ demonſtrata ſunt, ut quadratum D B ad quadratum B E, ita erit H M quadratum ad quadratum M L; & rectangulum G M B ad quadratum M L. rectangulum igitur G M B æquale eſt quadrato M H. eſt autem & H D F rectangulum quadrato D B æquale; propterea quòd A F ſectionem contingit, & A H ordinatim applicata eſt. ergo rectangulum G M B unà cum quadrato D B, hoc eſt quadratum D M æquale eſt rectangulo H D F unà cum quadrato M H: & ideo linea F H bifariam ſecatur in M, adiunctam habens D F. ſuntque K F, L M æquidiſtantes. æqualis igitur eſt K L ipſi L H.

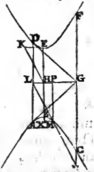
30. ſecundi huius. 9. quinti. 37. primi huius. 6. ſecundi 10. lemma Pappi. 2. ſexti.

THEOREMA XXXIII. PROPOSITIO XXXIII.

SI oppoſitas ſectiones duæ rectæ lineæ contingentes ſibi ipſis occurrant; & per tactus linea producatur; per occuſum verò contingentium ducatur linea tactus coniungenti æquidiſtans; & per punctum, quod coniungentem tactus bifariam ſecat, ducatur linea æquidiſtans alteri aſymptoton, convenienſque cum ſectione, & cum linea æquidiſtante per occurſum ducta: quæ inter dictũ punctum, & lineam æquidiſtantem interijcitur, à ſectione bifariam dividetur.

SINT oppoſitæ ſectiones A B C, D E F; & contingentes lineæ A G, G D; centrum autem ſit H, & aſymptotos H K; ductaque H G producatur: & iuncta A L D,

39. ſecundi huius. quæ bifariam ſecabitur in L, ducantur per G, H lineæ C G F, B H E ipſi A D æquidiſtantes: & per L ducatur L M N æquidiſtans H K. Dico L M æqualem eſſe M N. Applicentur enim à punctis E, M lineæ E K, M X æquidiſtantes G H; & per M ducatur M P æquidiſtans A D. Quoniam igitur ex iis, quæ ante demonſtrata ſunt, ut quadratum H E ad quadratum E K, ita eſt rectangulum
11. quinti. B X E ad quadratum X M: erit ut H E quadratum ad quadratum E K, ita rectangulum B X E unà cum quadrato
38. primi huius. H E, hoc eſt quadratum H X ad quadrata K E, X M. quadratum autem K E oſtenſum eſt æquale rectangulo G H L: & quadratum X M æquale eſt quadrato H P. ut igitur quadratum H E ad quadratum E K, ita quadratum H X, hoc
4. ſexti. 22 eſt M P ad rectangulum G H L unà cum quadrato H P. ſed ut quadratum H E ad quadratum E K, ita eſt quadratum M P ad quadratum P L. quare ut quadratum M P ad quadratum P L, ita quadratum M P ad rectangulum G H
9. quinti. L unà cum quadrato H P: & propterea quadratum L P rectangulo G H L unà
10. lemma Pappi. cum quadrato H P æquale erit. ergo recta linea L G in partes æquales ſecatur
2. ſexti. ad P, & in partes inæquales ad H. & ſunt æquidiſtantes M P, G N. linea igitur L M ipſi M N eſt æqualis.



THEOREMA XXXIV. PROPOSITIO XXXIV.

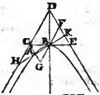
SI in una aſymptoton hyperbolæ aliquod punctum ſumatur; ab eoque recta linea ſectionem contingat; & per tactum ducatur æquidiſtans aſymptoto: quæ per dictum punctum tranſit, alteri aſymptoto æquidiſtans, à ſectione bifariam dividetur.

SIT hyperbole A B, aſymptoti verò C D, D E: & ſumpto in linea C D quovis puncto C, per ipſum ducatur C B E ſectionem contingens; & per B quidem ducatur F B G æquidiſtans C D; per C autem C A G, quæ ipſi D E æquidiſtet. Dico lineam C A æqualem eſſe A G. Ducatur enim per A linea A H æqui-
A diſtans C D, & per B linea B K æquidiſtans D E. Itaque
B quoniam C B æqualis eſt B E: erit & C K ipſi K D, &
C D F ipſi F E æqualis. quòd cùm rectangulum K B F æquale ſit rectangulo C A H; & linea B F æqualis D K, hoc eſt C K, & A H ipſi D C: rectangulum D C A æqua-
D le erit rectangulo K C G. ut igitur D C ad C K, ita C G ad A C. eſt autem D C ipſius C K dupla. ergo & C G dupla C A: icircoque linea C A ipſi A G eſt æqualis.



EVTOCIVS.

ALITER. Sit hyperbole A B, cuius aſymptoti C D, D E. & contingens C B E; æquidiſtantes autem C A G, F B G. Dico C A ipſi A G æqualem eſſe. Coniungatur enim A B,
E & ad H, K producatur. Itaque quoniam C B æqualis eſt
F B E: erit & K B ipſi B A æqualis. ſed & K B eſt æqua-
G lis A H. ergo & C A ipſi A G æqualis erit.



FED.

FED. COMMANDINVS.

ITAQVE quoniam C B æqualis eſt B E.) *Ex tertia ſecundi huius.* A
Erit & CK ipſi K D, & D F ipſi F E æqualis.] *Ex ſecunda ſexti.* B
Quòd cùm rectangulum K B F æquale ſit rectangulo C A H,) *Ex decima ſecunda ſecundi huius.* C
Vt igitur D C ad C K, ita C G ad A C.] *Ex decima quinta ſexti.* D

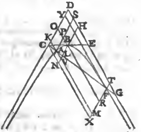
IN ALIAM DEMONSTRATIONEM, QVAM AFFERT EVTOCIVS.

ITAQVE quoniam C B æqualis eſt B E: erit & K B ipſi B A æqualis.] *Ob ſimilitudinem nanque triangulorum A B C, K B E erit ut C B ad B A, ita E B ad B K. & permutando ut C B ad B E, ita A B ad B K. æqualis igitur eſt K B ipſi B A.* E
Sed & K B eſt æqualis A H.) *Ex octava ſecundi huius. unde ſequitur & B A æquale eſſe A H,* F
Ergo & C A ipſi A G æqualis erit.) *Cùm enim triangulum A B G ſit æquale triangulo A H C, & linea B A æqualis A H: rurſus eadem ratione demonſtrabitur linea C A æqualis A G,* G

THEOREMA XXXV. PROPOSITIO XXXV.

IISDEM poſitis, ſi à ſumpto puncto recta linea ducatur, ſectionem in duobus punctis ſecans: erit ut tota ad eam, quæ extra ſumitur, ita inter ſe ſe portiones illius, quæ intra ſectionem continetur.

SIT A B hyperbole, cuius aſymptoti C D, D E, contingenſque C B E, & H B æquidiſtans C D: ducatur autẽ per C recta linea CALFG, quæ ſectionem in punctis A, F ſecet. Dico ut F C ad C A, ita eſſe F L ad L A. Ducantur enim per puncta C, A, B, F lineæ C N X, K A V M, O P B R, F Y ipſi D E æquidiſtantes: & per A, F ducantur A P S, T F R M X æquidiſtantes



C D. Quoniam igitur æqualis eſt A C ipſi F G: erit A
& K A æqualis T G. ſed K A eſt æqualis D S. ergo 34.primi.
& T G ipſi D S eſt æqualis: & propterea C K ipſi B
D Y. rurſus quoniam C K æqualis eſt D Y; & D K
ipſi C Y æqualis erit. ut igitur D K ad K C, ita Y C
ad C K: & ut Y C ad C K, ita F C ad C A. ſed ut C D
F C ad C A, ita M K ad K A; & ut M K ad K A, ita 1. ſexti.
M D rectangulum ad rectangulum D A: ut autem
D K ad K C, ita rectangulum H K ad rectangulum
K N. ergo ut rectangulum M D ad rectangulum
D A, ita rectangulum H K ad ipſum K N. atque eſt rectangulum A D æquale E
rectangulo D B, hoc eſt ipſi O N. eſt enim linea C B æqualis B E, & D O ipſi O C, F
quare ut rectangulum D M ad O N. ita H K ad K N. reliquum igitur M H ad 19.quinti.
reliquum B K eſt, ut totum D M ad totum O N, quòd cùm rectangulum K S æquale ſit H O; commune auferatur D P: erit reliquum K P reliquo P H æquale.
commune apponatur A B. totum igitur K B æquale eſt A H: & ut M D ad D A, G
ita M H ad H A, ſed ut M D ad D A, ita linea M K ad K A, hoc eſt F C ad C A: 1.ſexti.
ut autem M H ad H A, ita M V ad V A, hoc eſt F L ad L A. ergo ut F C ad C A, 4.
ita F L ad L A.

.1 l. EVTO-

EVTOCIVS.

ALITER. Sit hyperbole A B, cuius aſymptoti C D, D E: & à puncto C linea quidem C B ducta ſectionem contingat; C A G H verò in duobus punctis ſecet: & per B ducatur F B K ipſi C D æquidiſtans. Itaque demonſtrare oportet ut G C ad C A, ita eſſe G F ad F A. Coniungatur enim A B; atque ad L, M producatur: & à puncto E ducatur E N æquidiſtans C H. Quoniam igitur C B æqualis eſt B E: & C A ipſi E N eſt æqualis, & A B



8. ſecundi huius. ipſi B N. ſed cùm B M ſit æqualis L A: erit N M exceſſus linearum L A, A B. & quoniam in triangulo A M H ducta eſt E N ipſi A H æquidiſtans: 4. ſexti. ut A M ad M N, ita erit A H ad N E. & eſt N E æqualis A C. ut igitur H A ad A C, ita A M ad exceſſum linearum A B, B M, hoc eſt L B ad exceſſum linearum L A, A B. ut autem H A ad A C, ita 8. ſecundi huius. G C ad C A: eſt enim C A æqualis H G. ergo ut G C ad C A, ita L B ad exceſſum linearum L A, A B; & C F ad exceſſum linearum C A, A F. H ſed quoniam quærebatur; ſi ut G C ad C A, ita ſit G F ad F A: demonſtrare oportet, ut tota G C ad totam C A, ita eſſe G F ablatam ad ablatam F A, K & reliquam C F ad reliquam, videlicet ad exceſſum linearum C A, A F. quare demonſtrandum eſt ut G C ad C A, ita C F ad exceſſum linearum C A, A F.

FED. COMMANDINVS.

A QVONIAM igitur æqualis eſt A C ipſi F G: erit & K A æqualis T G.] *Linea A C eſt æqualis F G ex octava ſecundi huius. quare ob ſimilitudinem triangulorum A K C, G F T, eodem, quo ſupra, modo demonſtrabitur K A ipſi T G æqualis.*

B Et propterea C K ipſi D Y.] *Eſt enim ſimiliter C K æqualis F T, hoc eſt ipſi D T.*

C Et ut Y C ad C K, ita F C ad C A.] *Ex quarta ſexti ob ſimilitudinem triangulorum F C T, A C K.*

D Sed ut F C ad C A, ita M K ad K A.) *Ob ſimilitudinem triangulorum A C K, A F M.*

E Atque eſt rectangulum A D æquale rectangulo D B.) *Ex decima ſecunda ſecundi huius.*

F Hoc eſt ipſi O N. eſt enim linea C B æqualis B E.] *Nam cùm ſit linea C B æqualis B E, ex tertia ſecundi huius: erit ob ſimilitudinem triangulorum C B N, E B H & H B æqualis B N: idcircoque rectangulum H O rectangulo O N æquale.*

G Et ut M D ad D A, ita M H ad H A.) *Superius enim demonſtravit, ut rectangulum M D ad D A, ita eſſe M H ad B K.*

IN ALIAM DEMONSTRATIONEM, QVAM SCRIBIT EVTOCIVS.

H ET C F ad exceſſum linearum C A, A F.] *Nanque ut G C ad C A, ita eſt L B ad exceſſum linearum L A, A B. ut autem L B ad exceſſum linearum L A, A B, ita C F ad exceſſum linearum C A, A F; quod mox demonſtrabimus. ergo ut G C ad C A, ita C F ad exceſſum C A, A F. eſt enim ob ſimilitudinem triangulorum A C L, A F B, ut L A ad A B, ita C A ad A F: & dividendo ut exceſſus, quo L A excedit A B, ad ipſam A B, ita exceſſus, quo C A excedit A F, ad A F: & convertendo. rurſus quoniam ut L A ad A B, ita C A ad A F: erit componendo ut L B ad B A, ita C F ad F A. ſed ut A B ad exceſſum, quo L A excedit A B, ita A F ad exceſſum, quo C A excedit A F. ex æquali igitur ut L B ad exceſſum linearum L A, A B; ita C F ad exceſſum linearum C A, A F.*

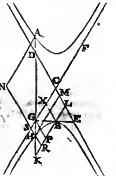
K Quare demonſtrandum eſt, ut G C ad C A, ita C F ad exceſſum linearum C A, A F.

A F.) *Hoc autem eſt, quod proximè demonſtravit: ſed licet etiã in hunc modum concludere. Sit enim O A exceſſus, quo linea C A ipſam A F excedit ; ut ſit C O æqualis A F: Quoniam igitur eſt ut tota G C ad totam C A, ita C F ablata ad ablatam A O: erit & reliqua G F ad reliquã O C, hoc eſt ad F A, ut G C ad C A. quod demonſtrare oportebat.*

THEOREMA XXXVI. PROPOSITIO XXXVI.

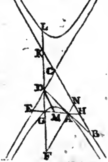
IISDEM poſitis, ſi à puncto ducta linea neque ſectionẽ in duobus punctis ſecet, neque æquidiſtans ſit aſymptoto ; ſed cũ oppoſita ſectione conveniat: erit ut tota ad lineã, quæ inter ſectionẽ & æquidiſtantem per tactum ductã interijcitur, ita quæ eſt inter oppoſitã ſectionẽ & aſymptotõ, ad eam, quæ inter aſymptotõ & alterã ſectionẽ.

SINT oppoſitæ ſectiones A, B ; quarum centrum C, aſymptoti D E, F G : & in linea G C ſumatur punctum G ; à quo ducatur G B E quidem ſectionem contingens; G H verò neque æquidiſtans ipſi C E, neque ſectionem in duobus punctis ſecans. iam conſtat H G productã convenire cum linea C D: & propterea cũ ſectione A B
A, ut demonſtratum eſt. conveniat igitur in puncto A: & per B ducatur K B L æquidiſtans C G. Dico ut A K ad K H, ita eſſe A G ad G H. Ducantur enim à punctis A, H lineæ H M, A N, quæ ipſi C G æquidiſtent: & à punctis B, G, H ducantur B X, G P, R H S N, quæ æquidiſtent D E. Itaque quoniam A D æqualis eſt G H: erit ut C D
A G ad G H, ita D H ad H G. ut autem A G ad G H, 2.ſexti.
ita N S ad S H: & ut D H ad H G, ita C S ad S G. ut igitur N S ad S H, ita C S ad S G. ſed ut N S ad S H ita re- 1.ſexti.
ctangulum N C ad rectangulum C H: & ut C S ad S G, ita rectangulum C R ad rectangulũ R G. ergo ut rectangulum N C ad rectangulum C H, ita rectangulum C R
ad ipſum R G. & ut unũ ad unum, ita omnia ad omnia. 12.quinti.
quare ut N C ad C H, ita totum N L ad C H & R G.
& quoniã E B eſt æqualis B G: erit & L B ipſi B P æqualis: 8.ſecundi
& rectangulum L X æquale rectangulo B G. ſed rectangulum L X rectangulo C H huius. 12
eſt æquale, ergo & B G ipſi C H. ut igitur N C ad C H, ita totum L N ad B G, & G R, hoc eſt ad R X. ſed R X eſt æquale L H: quoniam & C H ipſi B H, & M B ipſi E
X H. ergo ut N C ad C H, ita N L ad L H. ut autem N C ad C H, ita N S ad S H, hoc eſt A G ad G H : & ut N L ad L H, ita linea N R ad R H, hoc eſt A K ad K H. quare ut A K ad K H; ita A G ad G H.



EVTOCIVS.

ALITER. Sint oppoſitæ ſectiones A, L ; quarum aſymptoti B K, D C, & contingens B A D: ducatur autem L K D G F; & ſit F A ipſi C D æquidiſtans. Demonſtrandum eſt ut L F ad F G, ita L D ad D G. Coniungatur enim A G, & ad E, H protrahatur : erit A H æqualis E G, & H G ipſi
A E. ducatur per D linea D M æquidiſtans C H. ergo B A 8.ſecundi huius. 9
ipſi A D eſt æqualis. & H A ipſi A M. quare M G eſt ex- F
ceſſus linearum H A, A G, hoc eſt A G, G E. & quoniam B K æquidiſtat D M, ut H G ad G M, ita erit K G ad G D. atque eſt A E æqualis H G, & L D ipſi K G. ergo ut L D ad D G, ſic A E ad G M, hoc eſt ad exceſſum li-



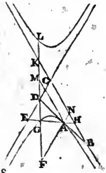
nearum

G nearum A G, G E. ſed ut A E ad exceſſum linearum A G, G E, ita D F ad exceſſum linearum D G, G F. ergo ut L D ad D G, ita D F ad exceſſum linearum D G, G F. & ut unum ad unum, ita omnia ad omnia. ut igitur L D ad D G, ita
K tota L F ad D G, & exceſſum linearum D G, G F: hoc eſt ad G F.

ALITER. Sint eadem, quæ ſupra: & per A ducatur A M ipſi B C æquidiſtans. Quoniam igitur B A eſt æqualis A D: erit & K M æqualis M D. & cùm æquidiſtantes ſint H K, A M: ut G M ad M K, ita erit G A ad A H, hoc eſt A G ad G E. ut autem A G ad G E, ita F G ad G D: & ut G M ad M K, ita dupla ipſius G M ad duplam M K. ergo ut F G ad G D, ita dupla G M ad duplam M K. atque eſt L G dupla G M: eſt enim L K ipſi D G æqualis, & K M ipſi M D; & D K dupla K M. ut igitur L G ad K D, ita F G ad G D: & permutando ut L G ad G F, ita K D ad D G. quare componendo ut L F ad F G, ita K G ad G D, hoc eſt L D ad D G.

2. ſexti.

16. ſecundi huius.



FED. COMMANDINVS.

A IAM conſtat H G productam convenire cum linea C D.) *Quoniam enim linea G H non æquidiſtat C E, neque ſectionem in duobus punctis ſecat: neceſſe eſt, ut conveniat cum ipſa C D ad partes D. nam ſi conveniret ad partes C; ſectioni prius occurreret; atque ita eam in duobus punctis ſecaret; quod non ponitur.*

B Et propterea cum ſectione A, ut demonſtratum eſt.) *In undecima ſecundi huius.*

C Itaque quoniam A D æqualis eſt G H.) *Ex ſexta decima ſecundi huius.*

D Erit ut A G ad G H, ita D H ad H G. ut autem A G ad G H, ita N S ad S H: & ut D H ad H G, ita C S ad S G.) *Hunc locum nos reſtituimus. in Græco enim exemplari ita legebatur:* ἐπεὶ ὃν ἴση ἐστὶν ἡ Α Δ τῇ Η Θ, ἔστιν ὡς Α Η πρὸς Σ Θ, ἡ Ν Σ πρὸς Σ Θ; ὡς δὲ ἡ Δ Θ πρὸς Θ Η ἡ Γ Σ πρὸς Σ Η.

E Sed R X eſt æquale L H: quoniam & C H ipſi B H.) *Vereor, ne codex mendoſus ſit. non enim video, quorſum hæc faciant. At verò R X ipſi L H æquale eſſe manifeſtò conſtat. nam ſi à rectangulo C R auferantur æqualia, videlicet rectangulum B C, & rectangulum C H; quæ remanent R X & L H æqualia erunt. Sed & aliter idem conſtare poteſt. eſt enim rectangulum B H utrique commune, & M B æquale X H, ex duodecima ſecundi huius. quare fortaſſe hoc modo legendum eſt. ſed R X eſt æquale L H: quoniam & C H ipſi B C, & M B ipſi X H; ut utrunque demonſtrationis modum innuat.*

IN ALIAM DEMONSTRATIONEM, QVÆ AB EVTOCIO AFFERTVR.

G ET H A ipſi A M.) *Ob ſimilitudinem triangulorum A B H, A D M.*

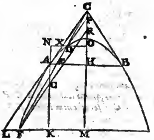
H Sed ut A E ad exceſſum linearum A G, G E, ita D F ad exceſſum linearum D G, G F.] *Hoc demonſtrabimus, ut in antecedente.*

K Hoc eſt ad G F.) *Linea enim D G unà cum exceſſu, quo exceditur à G F, eſt ipſi G F æqualis.*

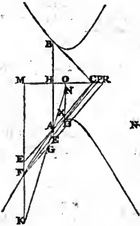
THEOREMA XXXVII. PROPOSITIO XXXVII.

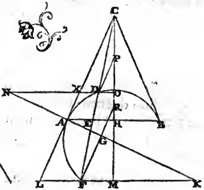
SI coni ſectionem, vel circuli circunferentiam, vel ſectiones oppoſitas contingentes duæ rectæ lineæ ſibi ipſis occurrant; & per tactus

tactus linea producatur; ab occurſu verò contingentium ducatur linea ſectionem in duobus punctis ſecans: erit ut tota ad eam, quæ extra ſumitur, ita portiones inter ſeſe, quæ à linea tactus coniungente fiunt.



SIT coni ſectio A B; contingenteſque A C, C B: & iuncta A B, ducatur C D E F. Dico ut F C ad C D, ita eſſe F E ad E D. Ducantur enim per C, A ſectionis diametri C H, A K: & per F, D ducantur D P, F R, L F M, N D O æquidiſtantes A H, L C. Quoniam igitur L F M æquidiſtat X D O: erit ut F C ad C D, ita L F ad X D, & F M ad D O, & L M ad X O. ergo ut quadratum L M ad quadratum X O, ita 4.sexti.
quadratum F M ad quadratum D O. ſed ut 22.sexti.
quadratum L M ad quadratum X O, ita A
L M C triangulum ad triangulum X C O: & B
ut quadratum F M ad quadratum D O, ita triangulum F R M ad triangulum D P O. quare ut triangulum L C M ad triangulum X O C, ita F R M triangulum ad triangulum D P O; & ita reliquum quadrilaterum L C R F ad reliquum X C P D. eſt autem L C R F quadrilaterum triangulo A L K æquale, 19.quinti. C





& quadrilaterum X C P D æquale triangulo A N X. ut igitur quadratum L M ad quadratum X O, ita A L K triangulum ad triangulum A N X. ſed ut quadratum L M ad quadratum X O, ita quadratum F C ad quadratum C D: & ut D
triangulum A L K ad triangulum A N X, ita quadratum L A ad quadratum B
A X, & quadratum F E ad quadratum E D. ergo ut quadratum F C ad quadratum C D, ita F E quadratum ad quadratum E D: & ideo ut linea F C ad 22.sexti.
C D, ita F E ad E D.

FED. COMMANDINVS.

A SED ut quadratum L M ad quadratum X O, ita L C M triangulum ad triangulum X C O.) *Quadratum enim L M ad quadratum X O duplam proportionem*
20. ſexti *habet eius, quæ eſt L M ad X O. ſed & triangulum L C M ad triangulum X C O*
19. *proportionem habet duplam eius, quæ eſt L M ad X O; ſimilia nanque ſunt triangula L C M, X C O. ergo ut quadratum L M ad quadratum X O, ita triangulum L C M ad triangulum X C O.*

B Et ut quadratum F M ad quadratum D O, ita triangulum F R M ad triangulum D P O.) *Ob ſimilitudinem triangulorum F R M, D P O, ut dictum eſt.*

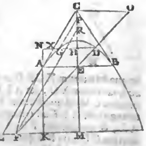
C Eſt autem L C R F quadrilaterum triangulo A L K æquale, & quadrilaterum X C P D æquale triangulo A N X.) *Nam in coni ſectione, circuli circunferentia, & ſectionibus oppoſitis diameter, quæ per occurſum contingentium ducitur, videlicet per punctum C, bifariam ſecat lineam tactus coniungentem ex trigeſima, & trigeſima nona ſecundi huius: & propterea linea A H B, F M ad diametrum C H ordinatim applicatæ ſunt. ergo ex iis, quæ demoſtrantur in quadrageſima nona, & quinquageſima primi huius, quadrilaterum X C P D triangulo A N X eſt æquale: & quadrilaterum A C R G (ſecet enim linea A K ipſam F R in G) æquale triangulo F G K: quare utrique addito quadrilatero L A G F, erit totum quadrilaterum L C R F æquale triangulo L A K. In oppoſitis vero ſectionibus illud idem ſequitur ex demonſtratis in undecima huius.*

D Sed ut quadratum L M ad quadratum X O, ita quadratum F C ad quadratum C D.] *Nam ut L M ad X O, ita L C ad C X. & ut L C ad C X, ita F C ad*
4. ſexti
2. ſexti *C D. ergo ut L M ad X O, ita F C ad C D: & propterea ut quadratum L M ad*
22. ſexti *quadratum X O, ita quadratum F C ad ipſum C D.*

E Ita quadratum L A ad quadratum A X, & quadratum F E ad quadratum
2. ſexti E D.] *Eſt enim ut L A ad A C, ita F E ad E C. ut autem C A ad A X, ita C E ad E D. ex æquali igitur ut L A ad A X, ita F E ad E D; & ut quadratum L A ad quadratum A X, ita F E quadratum ad quadratum E D.*

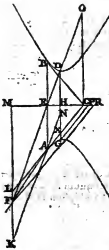
THEOREMA XXXVIII. PROPOSITIO XXXVIII.

IISDEM, poſitis ſi per contingentium occurſum ducatur recta linea, tactus coniungenti æquidiſtans; & per punctum, quod coniungentem tactus bifariam dividit, ducatur linea, ſecans & ſectionem ipſam in duobus punctis, & lineam æquidiſtantem per occurſum ductam: erit ut tota ad eam, quæ extra ſumitur inter ſectionem & lineam æquidiſtantem, ita portiones inter ſeſe, quæ à linea tactus coniungente efficiuntur.



SIT ſectio A B, quam contingant rectæ lineæ A C, C B: ſitque A B coniungens tactus:
A & diametri A N, C M, manifeſtum eſt lineam A B ad punctum E bifariam ſecari. Itaque ducatur à puncto C linea C O ipſi A B æquidiſtans; & per E ducatur F E D O. Dico ut F O ad O D, ita eſſe F E ad E D. Ducantur enim à punctis F, D lineæ L F K M, D H G X N, æquidiſtãtes A B, & per F, G ducatur F R, G P, quæ ipſi L C æ-

quid



quidiſtent. Eodem modo, quo ſupra, demonſtrabimus ut quadratum L M ad quadratum X H, B
ita quadratum L A ad quadratum A X. atque C
eſt ut quadratum L M ad quadratum X H, ita L C quadratum ad quadratum C X, & quadratum F O ad quadratum O D: ut autem quadratum L A ad quadratum A X, ita F E quadra- D
tum ad quadratum E D. ergo ut quadratum F O ad quadratum O D, ita quadratum F E ad quadratum E D: & ut linea F O ad O D, 22.ſexti.
ita F E ad E D.

FED. COMMANDINVS.

MANIFESTVM eſt lineam A B ad punctum A
E bifariam ſecari.] *Ex trigeſima & trigeſima nona ſecundi huius, ut ſupra admonuimus.*

Eodem modo, quo ſupra, demonſtrabimus ut B
quadratum L M ad quadratum X H, ita quadratum L A ad quadratum A X.) *Demonſtrabimus enim ut quadratum L M ad quadratum X H, ita triangulũ A L K ad triangulum A N X. ſed ut triangulum A L K ad triangulum A N X, ita quadratum L A ad quadratum A X: utrunque enim proportionem habet duplam eius, quæ eſt L A ad A X. ergo ut quadratum L M ad quadratum X H, ita quadratum L A ad quadratum A X.*

Atque eſt ut quadratum L M ad quadratum X H, ita L C quadratum ad qua- C
dratum C X, & quadratum F O ad quadratum O D.) *Eſt enim ut L C ad C X, ita F O ad O D; propterea quòd lineæ C O, X D inter ſeſe æquidiſtant.*

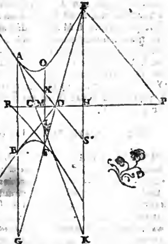
Vt autem quadratum L A ad quadratum A X, ita quadratum F E ad qua- D
dratum E D.) *Rurſus cùm æquidiſtantes ſint A E, X D: erit F E ad E D, ut L A ad A X.*

THEOREMA XXXIX. PROPOSITIO XXXIX.

SI oppoſitas ſectiones duæ rectæ lineæ contingentes ſibi ipſis occurrant; & per tactus linea producatur; ab occurſu verò contingentium ducta linea & utranque ſectionem, & lineam tactus coniungentem ſecet: erit ut tota ad eam, quæ extra ſumitur inter ſectionem & coniungentem tactus, ita portiones inter ſeſe, quæ inter ſectiones & contingentium occurſum interijciuntur.

SINT oppoſitæ ſectiones A, B; quarum centrum C, & lineæ contingentes A D, D B: iunctæ verò A B, C D producantur; & per D ducatur E D F G. Dico ut E G ad G F, ita eſſe E D ad D F. Iungatur enim A C, producaturque: & per E, F ducantur E H S K, F N L M X O ipſi A B æquidiſtantes; & E P, F R æquidiſtantes A D. Quoniam igitur F X, E S inter ſe æqui- A
diſtant; & ad ipſas ducuntur E F, X S, H M: erit ut E H ad H S, ita F M ad M X; & permutando ut E H ad F M, ita H S ad M X. ergo ut qua- 22. ſexti.

dratum E H ad quadratum F M, ita quadratum H S ad quadratum M X. ut autem quadratum E H ad quadratum F M, ita E H P triangulum ad triangulum F M R: & ut quadratum H S ad quadratum M X, ita triangulum D H S ad D M X triangulum. ergo ut triangulum E H P ad triangulum F M R, ita triangulum D
B H S ad triangulum D M X. ſed triangulum E H P triangulis A S K, H D S eſt æquale: & triangulum F M R æquale triangulis A X N, D M X. ut igitur triangulum D H S ad triangulum D M X, ita triangulum A S K unà cum triangulo D H S ad triangulum A X N unà cum triangulo
19.quinti. D M X. quare & reliquum triangulum A S K ad reliquum A X N erit, ut triangulum D H S ad ipſum D M X. ut autem triangulum A S K ad A X N, ita quadratum
C K A ad quadratum A N, hoc eſt quadratum E G ad quadratum G F: & ut triangulum D H S ad triangulum D M X, ita quadratum H D ad quadratum D M, hoc eſt
D quadratum E D ad quadratum D F. ergo ut E G ad G F, ita E D ad D F.



FED. COMMANDINVS.

A QVONIAM igitur F X, E S inter ſe æquidiſtant; & ad ipſas ducuntur E F, X S, H M: erit ut E H ad H S, ita F M ad M X.] *Fiunt enim triangula ſimilia E D H, F D M; itemque ſimilia inter ſe D H S, D M X. quare ut E H ad H D, ita F M ad M D. & ut D H ad H S, ita D M ad M X. ex æquali igitur ut E H ad H S, ita F M ad M X.*

B Sed triangulum E H P triangulis A S K, H D S eſt æquale: & triangulum F M R æquale triangulis A X N, D M X.) *Ex undecima huius.*

C Hoc eſt quadratum E G ad quadratum G F.) *Ob ſimilitudinem triangulorum K N E, A N G.*

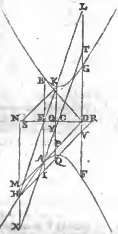
D Ergo ut E G ad G F, ita E D ad D F.] *Ex ijs, quæ dicta ſunt, ſequitur, ut quadratum E G ad quadratum G F, ita eſſe quadratum E D ad D F quadratum, ergo ex vigeſima ſecunda ſexti ut linea E G ad G F, ita eſt E D ad D F.*

THEOREMA XL. PROPOSITIO XL.

IISDEM poſitis, ſi per occurſum contingentium ducatur recta linea, tactus coniungenti æquidiſtans; & à puncto, quod coniungentem tactus bifariam dividit, ducatur linea ſecans utramque ſectionem, & æquidiſtantem ei, quæ tactus coniungit: erit ut tota ad eam, quæ extra ſumitur inter æquidiſtantem & ſectionem, ita portiones inter ſeſe, quæ inter ſectiones & coniungentem tactus interijciuntur.

SINT

SINT oppoſitæ ſectiones A, B; quarum centrum C, & contingentes lineæ A D,
D B; iungaturque A B, & C D E: erit A E ipſi E B æqualis. ducatur per D linea A
F D G æquidiſtans A B: & per E, quomodocunque contingat, H E K L. Dico ut
H L ad L K, ita eſſe H E ad E K. Ducantur enim à punctis H, K lineæ H N M X,
K O P ipſi A B æquidiſtãtes; & H R, K S æquidiſtantes A D: & ducatur A C X T.
Itaque quoniã in lineas æquidiſtantes X M, K P cadunt X A Y, M A P: erit ut X A B
ad A Y, ita M A ad A P. ut autẽ X A ad A Y, ita H E ad C
E K: & ut H E ad E K, ita H N ad K O, propter ſimi-
litudinem triangulorum H E N, K E O. quare ut H N
ad K O, ita M A ad A P: & iccirco ut quadratum H N
ad quadratum K O, ita M A quadratum ad quadra-
tum A P. ſed ut quadratum H N ad quadratum K O, D
ita triangulum H R N ad triangulum K S O: & ut
quadratum M A ad quadratum A P, ita X M A trian-
gulum ad triangulum A Y P. ut igitur triangulum H
R N ad triangulum K S O, ita triangulum X M A ad
triangulum A Y P. triangulum autem H R N triangu- E
lis X A M, M N D eſt æquale: & triangulum K S O
æquale triangulis A Y P, P O D. ergo ut triangulum
XAM unà cum triangulo M N D ad triangulum AYP
unà cum triangulo P O D, ita X M A triangulum ad
triangulum A Y P. quare & reliquum triangulum M
N D ad reliquum D O P eſt, ut totum ad totum. ſed
ut triangulum X M A ad triangulum A Y P, ita qua-
dratum X A ad A Y quadratum: & ut triangulum M
N D ad triangulum D O P, ita M N quadratum ad
quadratum P O. ergo ut quadratum M N ad quadratum P O, ita quadratum
X A ad quadratum A Y. ut autem quadratum M N ad quadratum P O, ita
N D quadratum ad quadratum D O: & ut quadratum X A ad quadratum A Y, F
ita quadratum H E ad quadratum E K. ſed ut quadratum N D ad quadratum G
D O, ita quadratum H L ad quadratum L K. ut igitur quadratum H E ad
quadratum E K, ita H L quadratum ad quadratum L K: & propterea ut linea
H E ad E K, ita H L ad L K.



FED. COMMANDINVS.

ERIT A E ipſi E B æqualis] *Ex trigeſima nona ſecundi huius.* A

Erit ut XA ad AY, ita M A ad A P.] *Ob ſimilitudinem triangulorũ A M X, A P Y.* B

Vt autem X A ad A Y, ita H E ad E K.) *Producantur E A, O P uſque ad li-* C
neam H R in puncta I, Q: erit H I ipſi M A æqualis, & H Q æqualis M P. ergo ut 34. primi.
X A ad A Y, ita M A ad A P, hoc eſt H I ad I Q. & ut H I ad I Q, ita H E 2. ſexti.
ad E K. ut igitur X A ad A Y, ita H E ad E K.

Sed ut quadratum H N ad quadratum K O, ita triangulum H R N ad tri- D
angulum K S O.] *Sunt enim triangula H R N, K S O inter ſe ſimilia.*

Triangulum autem H R N triangulis X A M, M N D eſt æquale: & trian- E
gulum K S O æquale triangulis A Y P, P O D.] *Ex undecima huius.*

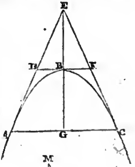
Et ut quadratum X A ad quadratum A Y, ita quadratum H E ad quadratum F
E K.) *Superius enim oſtenſum eſt, ut X A ad A Y, ita H E ad E K.*

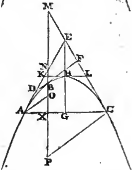
Sed ut quadratum N D ad quadratum D O, ita quadratum H L ad quadra- G
tum L K.) *Secet enim D F lineam H R in V: erit ut N D ad D O, ita M D ad D P, hoc eſt H V ad V Q. ſed ut H V ad V Q, ita H L ad L K. quare ut N D ad D O, ita H L ad L K. & ut quadratum N D ad quadratum D O, ita quadratum H L ad quadratum L K.*

THEOREMA XLI. PROPOSITIO XLI.

SI parabolen contingentes tres rectæ lineæ inter ſe conveniant; in eandem proportionem ſecabuntur.

SIT parabole A B C; quam rectæ lineæ A D E, E F C, D B F contingant. Dico ut C F ad F E, ita eſſe E D ad D A, & F B ad B D. Coniungatur enim A C;
A & bifariam in G dividatur: perſpicuum eſt lineam, quæ ab E ducitur ad
B G, ſectionis diametrum eſſe. Si igitur per B tranſit; erit linea D F æquidiſtans A
C D C, & ab E G bifariam in puncto B ſecabitur: propterea que A D ipſi D E, & E F ipſi F C æqualis erit. conſtat igitur verum eſſe illud, quod proponebatur. Sed non tranſeat E G per B, ſed per aliud punctum,
E quod ſit H; & per H ducatur K H L æquidiſtans A C, quæ in H ſectionem continget: erit per ea, quæ dicta ſunt, A K ipſi K E æqualis, & C L ipſi L E. Itaque per punctum quidem B ducatur M N B X æquidiſtans E G: per A, C verò ducantur A O, C P æquidiſtantes D F. Quoniam igitur M B ipſi
F E H æquidiſtat: erit M B diameter; & D F in B ſectionem contingit. quare A O, C P ordinatim applicabuntur. & quoniam M B diameter eſt; &
35.primi huius. C M ſectionem contingit; ordinatimque applicatur C P: erit M B ipſi B P æqualis. ergo M F ipſi F C.
2.ſexti. quòd cùm M F ſit æqualis F C, & E L ipſi L C; ut M C ad C F, ita eſt E C ad C L: & permutando ut
4.ſexti. M C ad C E, ita F C ad C L. ut autem M C ad C E, ita X C ad C G. ergo ut F C ad C L, ita X C ad C G. ſed ut G C ad C A, ita L C ad C E; quòd utraque utriuſque dupla ſit. ex æquali igitur, ut E C
G ad C F, ita A C ad C X: & per converſionẽ rationis ut C E ad E F, ita C A ad A X: dividendoque ut C F ad F E, ita C X ad X A. rurſus quoniã diameter eſt M B; cõtingitque A N, & ordinatim applicatur A O: erit
35.primi huius. N B ipſi B O, & N D ipſi D A æqualis. eſt autem & E K æqualis K A. ergo ut E A ad A K, ita N A ad
4.ſexti. A D: & permutando ut E A ad A N, ita K A ad A D. ſed ut E A ad A N, ita G A ad A X. quare ut K A ad A D, ita G A ad A X. atque eſt ut C A ad A G, ita E A ad A K: utraque enim utriuſque eſt dupla. ex æquali igitur ut C A ad A X, ita E A ad A D: & dividendo ut C X ad X A, ita E D ad D A. demonſtratum eſt autem ut C X ad X A, ita C F ad F E. ergo ut C F
H ad F E, ita E D ad D A. rurſus quoniam ut C X ad X A, ita C P ad A O. & eſt linea quidem C P dupla B F; quòd C M ipſius M F ſit dupla: linea verò A O dupla D B; quòd & A N ipſius N D. ut igitur C X ad X A, ita F B ad B D, & C F ad F E, & E D ad D A.





FED. COMMANDINVS.

A PERSPICVVM eſt lineam, quæ ab E ducitur ad G, ſectionis diametrum eſſe.] *Ex vigeſima nona ſecundi huius.*

B Si igitur per B tranſit; erit linea D F æquidiſtans A C.] *Ex quinta ſecundi huius.*

Et

Et ab E G bifariam in puncto B ſecabitur) *Eſt enim D B ad B F, ut A G ad G C, quod demonſtravimus in commentarijs in ſextam primi huius.* C

Propterea que A D ipſi D E, & C F ipſi F E æqualis erit.) *Sequitur ex iam dictis, & ex 35. primi huius, lineam G B ipſi B E æqualem eſſe. quare ex ſecunda ſexti, & A D ipſi D E, & C F ipſi F E eſt æqualis.* D

Quæ in H ſectionem continget.) *Ex 32. primi huius, quod & aliter conſtare poteſt. ſi enim K H L non contingit ſectionem; ducatur per H linea contingens, quæ æquidiſtabit ipſi A G C, ex quinta ſecundi huius. ſed cum K H L eidem æquidiſtet; erunt ambæ inter ſe æquidiſtantes, quod eſt abſurdum: ſiquidem in puncto H conveniant.* E

Erit M B diameter.) *Ex demonſtratis in 46. primi huius.* F

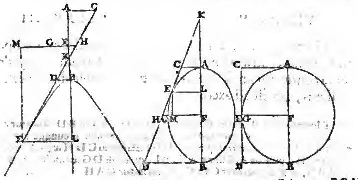
Ex æquali igitur ut E C ad C F, ita A C ad C X.) *Sequitur hoc ex æquali & cõvertẽdo.* G

Rurſus quoniã ut C X ad X A, ita C P ad A O.) *Ob ſimilitudinẽ triangulorũ C P X, X A O.* H

THEOREMA XLII. PROPOSITIO XLII.

SI in hyperbola, vel ellipſi, vel circuli circunferentia, vel oppoſitis ſectionibus ab extremo diametri ducantur lineæ æquidiſtantes ei, quæ ordinatim applicata eſt; & alia quæpiam linea quomodocunque contingens ducatur: abſcindet ex ipſis lineas, continentes rectangulum æquale quartæ parti figuræ, quæ ad eandem diametrum conſtituitur.

SIT aliqua prædictarum ſectionum, cuius diameter A B: atque à punctis A, B ducantur lineæ A C, B D æquidiſtantes ei, quæ ordinatim applicata eſt: & alia quæpiam linea C E D in puncto E ſectionem contingat. Dico rectangulum lineis A C, B D contentum æquale eſſe quartæ parti figuræ, quæ ad diame-



trum A B conſtituitur. Sit enim ſectionis centrum F; & per F ducatur F G H ipſis A C, B D æquidiſtans. Itaque quoniam A C, B D æquidiſtantes ſunt, & eſt æquidiſtãs F G: erit F G diameter ipſi A B coniugata. ergo quadratum F G æquale eſt quartæ parti figuræ, quæ fit ad A B. ſi igitur in ellipſi & circulo linea F G per E tranſit; æquales ſunt A C, F G, B D: & ideo per ſe manifeſtum eſt, rectangulum, quod continetur A C, B D æquale eſſe quadrato F G, hoc eſt quartæ parti figuræ, quæ ad A B conſtituitur. Sed non tranſeat per E: & D C, B A productæ conveniant in K: et tranſeatque per E linea quidem E L ipſi A C æqui-

A æquidiſtans, E M verò æquidiſtans A B. Quoniam igitur rectangulum K F L
B C quadrato A F eſt æquale: ut K F ad F A, ita erit A F ad F L. eſt autem ut K F ad F A, hoc eſt ad F B, ita K A ad A L: & convertendo ut B F ad F K, ita L A
D ad A K; componendoque vel dividendo, ut B K ad K F, ita L K ad K A. ſed ut B K ad K F, ita D B ad F H: & ut L K ad K A, ita E L ad C A. ergo ut D B
E ad F H, ita E L ad C A: & propterea rectangulum contentum D B, C A æqua-
F le eſt ei, quod F H, E L continetur, hoc eſt rectangulo H F M. rectangulum autem H F M eſt æquale quadrato F G; hoc eſt quartæ parti figuræ, quæ ad A B. rectangulum igitur ex D B, C A æquale eſt quartæ parti figuræ, quæ ad diametrum A B conſtituitur.

FED. COMMANDINVS.

A QVONIAM igitur rectangulum K F L quadrato A F eſt æquale.] *Ex trigeſima ſeptima primi huius.*

B Vt K F ad F A, ita erit A F ad F L.] *Ex 15. ſexti.*

C Eſt autem ut K F ad F A, hoc eſt ad F B, ita K A ad A L.) *In hyperbola hoc ſequitur ex 12. quinti. Quoniam enim ut K F ad F A, ita A F ad F L: erit ut K F ad F A, ita K F, & F A ad A F & F L, hoc eſt K A ad A L. ſed in ellipſi & circulo ita dicemus. Quoniam ut K F ad F A, ita A F ad F L: per converſionem rationis erit ut F K ad K A, ita F A ad A L: & permutando ut K F ad F A, ita K A ad A L.*

D Sed ut B K ad K F, ita D B ad F H: & ut L K ad K A, ita E L ad C A.) *Hac nos addidimus perſpicuitatis cauſà, quæ tamen deſiderari videbantur.*

E Et propterea rectangulum contentum D B, C A æquale eſt ei, quod F H, E L continetur. *Ex 16. ſexti.*

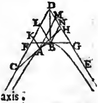
F Rectangulum autem H F M æquale eſt quadrato F G.) *Ex trigeſima octava primi huius.*

THEOREMA XLIII. PROPOSITIO XLIII.

SI hyperbolen recta linea contingat; abſcindet ex aſymptotis ad ſectionis centrum lineas continentes rectangulum æquale ei, quod continetur lineis ab altera contingente abſciſſis ad verticem ſectionis, qui eſt ad axem.

SIT hyperbole A B, cuius aſymptoti C D, D E; & axis B D: ducatur autem per B linea F B G ſectionem contingens: & alia quæpiam utcunque contingens ducatur C A H. Dico rectangulum F D G rectangulo C D H æquale eſſe. Ducantur enim à punctis A, B lineæ A K, B L, quæ ipſi D G æquidiſtent; & lineæ A M, B N, quæ æquidiſtent C D. Quoniam igitur C A H ſectionem contingit: erit C A æqualis A H. quare C H dupla eſt H A; & C D ipſius A M; & D H ipſius A K dupla. ergo rectangulum C D H quadruplum eſt rectanguli K A M. Eodem modo demonſtrabitur rectangulum F D G rectanguli L B N quadruplum. ſed rectangulum K A M eſt æquale rectangulo L B N. rectangulum igitur C D H rectangulo F D G æquale erit. ſimiliter demonſtrabitur, etiam ſi D B ſit alia quæpiam diameter, & non axis.

3 ſecundi huius.
4. ſexti.
20.
12. ſecũdi huius.

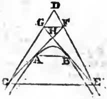


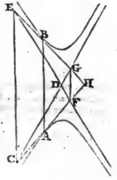
THEO-

THEOREMA XLIV. PROPOSITIO XLIV.

SI hyperbolen, vel oppoſitas ſectiones contingentes duæ rectæ lineæ aſymptotis occurrant: quæ ad occurſus ducuntur, lineæ tactus coniungenti æquidiſtantes erunt.

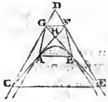
SIT hyperbole, vel oppoſitæ ſectiones A B; aſymptoti verò C D, D E; & contingentes C A H F, E B H G: iunganturque A B, F G, C E. Dico eas inter ſe æquidiſtantes eſſe. Quoniam enim rectangulum C D F æquale eſt rectangulo A
G D E: ut C D ad D E, ita erit 15. ſexti.
G D ad D F. æquidiſtat igitur
C E ipſi G F: & ideo ut H G ad B
G E, ita H F ad F C. C ut autem E G ad G B, ita C F ad F A: utraque enim utriuſque eſt dupla. ergo ex æquali ut H G ad G B, ita H F ad F A. linea igitur G F ipſi
A B eſt æquidiſtans. D

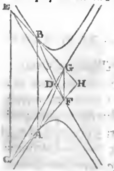


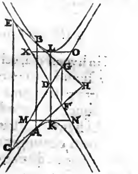


EVTOCIVS.

Demonſtratis lineis C E, G F inter ſe æquidiſtantibus, coniungantur G A, F B. Et quoniam æquidiſtant F G, C E: erit triangulum C G F triangulo E G F æquale. atque eſt triangulum quidem C G F duplum trianguli A G F; quòd linea C F ipſius F A ſit dupla: triangulum verò E G F duplum trianguli B G F. ergo triangulum A G F triangulo B G F eſt æquale: & propterea linea F G ipſi A B æquidiſtat. In op- 1. ſexti. 39. primi.



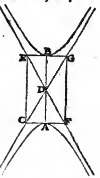




poſitis verò ſectionibus, ſi linea A B per centrum D non tranſeat; ducatur per D ipſi E C æquidiſtans K D L: & per K, L ducantur M K N, X L O, quæ ſectiones contingant. Quoniam igitur rectangulum X D O æquale eſt rectangulo M D N; rectangulum autem X D O rectangulo E D G eſt æquale; & rectangulum M D N æquale rectangulo C D F: ſequitur rectangulum E D G rectangulo C D F æquale eſſe. 43 huius.

FED. COMMANDINVS.

A QVONIAM enim rectãgulum C D F æquale eſt rectangulo G D E: ut C D ad D F, ita erit G D ad D F.) *Hoc in hyperbola ita eſſe ex antecedente conſtat: ſed in oppoſitis ſectionibus, cùm linea A B per centrum D non tranſit; ab Eutocio in fine commentarij demonſtratur. Quòd ſi A B tranſeat per D; illud facilè conſtare poteſt. deſcripta etenim figura, lineæ C F, E G æquidiſtantes ſunt. quare triangula A D F, B D E ſimilia: & cùm A D ſit æqualis D B; etiam inter ſe æqualia erunt. eadem quoque ratione æqualia oſtendentur triangula C D A, G D B. ergo totum triangulum C D F toti G D E eſt æquale. & ex quintadecima propoſitione ſexti Elementorum, ut C D ad D G, ita eſt E D ad D F; permutandoque ut C D ad D E, ita G D ad D F. ergo C E, G F inter ſe æquidiſtant. Præterea, ex demonſtratis in quinta decima ſecundi huius, lineæ C A, A F, E B, B G æquales ſunt: ideoque & æquales & æquidiſtantes lineæ, quæ ipſas coniungunt. cùm igitur C E, F G æquidiſtent ipſi A B; etiam inter ſeſe æquidiſtabunt.*



B Æquidiſtat igitur C E ipſi G F.) *Cùm enim ſit ut C D ad D E, ita G D ad D F; & angulus ad D, vel communis, vel æqualis: erit triangulum*
6.ſexti.
27.primi. *G D F triangulo C D E ſimile. & angulus D G F æqualis angulo D C E. ergo G F,*
28. *C E inter ſe æquidiſtent neceſſe eſt.*

C Et ideo ut H G ad G E, ita H F ad F C.] *In oppoſitis ſectionibus ſequitur illud ex ſecunda ſexti: at verò in hyperbola ob ſimilitudinem triangulorum C H E, G H F, ut E H ad H G, ita eſt C H ad H F; & componendo, convertendoque ut H G ad G E, ita H F ad F C. Hic autem incipit demonſtrare lineam G F ipſi A B æquidiſtantem eſſe; quod quidem ab Eutocio etiam aliter demonſtratur.*

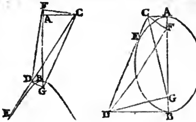
D Linea igitur G F ipſi A B eſt æquidiſtans.) *Ex ſecunda ſexti in oppoſitis ſectionibus: ſed in hyperbola cùm ſit ut H G ad G B, ita H F ad F A; & convertendo, dividendoque erit ut B H ad H G, ita A H ad H F; & permutando ut B H ad H A, ita G H ad H F. ſunt autem anguli ad H inter ſe æquales. triangulum igitur A H B*
6.ſexti. *ſimile eſt triangulo G H F. & angulus A B G æqualis angulo B G F. quare G F ipſi A B æquidiſtat.*

THEOREMA XLV. PROPOSITIO XLV.

SI in hyperbola, vel ellipſi, vel circuli circunferentia, vel oppoſitis ſectionibus ab extremo axis lineæ ad rectos angulos ducantur; & quartæ parti figuræ æquale rectangulum comparetur ad axem ex utraque parte; quod in hyperbola quidẽ, & ſectionibus oppoſitis excedat figura quadrata; in ellipſi verò deficiat; & ducatur linea ſectionem contingens, occurrenſque eis, quæ ſunt ad rectos angulos: lineæ, quæ ab occurſibus ducuntur ad puncta ex comparatione facta, angulos rectos ad ea efficient.

SIT una dictarum ſectionum, cuius axis A B; & lineæ A C, B D ad rectos angulos ducantur: contingat autem C E D; & quartæ parti figuræ æquale rectangulum comparetur ex utraque parte, ſicuti dictum eſt, videlicet rectangulum A F B,

A F B, & A G B: & coniungantur C F, C G, D F, D G. Dico angulum C F D, & angulum C G D rectum eſſe. Quoniam enim oſtenſum eſt rectangulum ex 42. huius. A C, B D æquale quartæ parti figuræ, quæ ad A B conſtituitur; atque eſt rectangulum A F B æquale quartæ parti eiuſdem figuræ: rectangulum ex A C, B D rectangulo A F B æquale erit. ergo ut C A ad A F, ita F B ad B D. & ſunt anguli, qui ad A, B, recti. angulus igitur A C F angulo B F D eſt æqualis, anguluſque



15. ſexti. 6. ſexti.

A F C æqualis angulo F D B. & quoniam angulus C A F eſt rectus: anguli A C F, A F C uni recto æquales erunt. demonſtratum autem eſt angulum A C F æqualem eſſe angulo D F B. ergo C F A, D F B anguli uni recto ſunt æquales. 32. primi reliquus igitur angulus D F C rectus eſt, ſimiliter & angulus C G D rectus demonſtrabitur. A

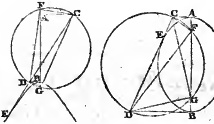
FED. COMMANDINVS.

A RELIQVVS igitur angulus D F C rectus eſt.) *In ellipſi ſcilicet, nam in hyperbola angulus D F C ex duobus angulis C F A, D F B conſtat.*

THEOREMA XLVI. PROPOSITIO XLVI.

IISDEM poſitis, lineæ coniunctæ æquales facient angulos ad contingentes.

IISDEM nanque poſitis, dico angulum A C F angulo D C G; & angulum C D F angulo B D G æqualem eſſe. Quoniam enim oſtendimus utrunque angulorum C F D, C G D rectum eſſe: ſi circa diametrum C D circulus deſcribatur; per puncta F, G tranſibit. quare angulus D C G æqualis eſt angulo D F G;



quòd ſint in eadem circuli portione. angulus autem D F G angulo A C F eſt æqualis, ut demonſtratum fuit. ergo & D C G angulus æqualis erit angulo A C F. Eodem modo, & angulus C D F angulo B D G æqualis oſtendetur.

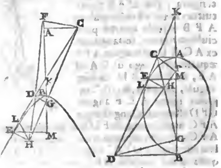
THEOREMA XLVII. PROPOSITIO XLVII.

IISDEM poſitis, linea, ab occurſu coniunctarum ad tactum ducta, perpendicularis eſt ad contingentem.

PONANTVR eadem, quæ priùs; & lineæ C G, F D ſibi ipſis occurrant in H: & C D, B A productæ occurrant in K; coniungaturque E H. Dico E H ad

 C D

CD perpendicularem eſſe. Si enim non eſt ita; ducatur à puncto H ad CD per-
A pendicularis HL. Quoniam igitur angulus CDF æqualis eſt angulo GDB, & angulus DBG rectus æqualis recto DLH: triangulũ DGB triangulo LHD
4. ſexti. ſimile erit. quare ut GD ad DH, ita BD ad DL, ſed ut GD ad DH, ita FC ad CH: propterea
B quòd anguli ad FG recti, & qui ad H æquales ſunt. & ut FC ad
C CH, ita AC ad CL, ob ſimilitudinem triangulorum AFC, LCH. ut igitur BD ad DL, ita AC ad CL: & permutando ut DB ad
D CA, ita DL ad LC. ut autem DB ad CA, ita BK ad KA. ergo ut DL ad LC, ita BK ad KA. Itaque à puncto E ducatur linea EM ipſi AC æquidiſtans, quæ ad AB ordinatim applicata erit; &ut BK ad KA, ita erit BM ad MA. ſed ut
E F BM ad MA, ita DE ad EC. quare ut DL ad LC, ita erit DE ad EC: quod
G eſt abſurdum. non igitur HL perpendicularis eſt ad LC, neque alia ulla, præter ipſam HE.



FED. COMMANDINVS.

A QVONIAM igitur angulus CDF æqualis eſt angulo GDB.) *Eſt enim ex antecedente angulus CDF æqualis angulo GDH: itẽque angulo LDH ex quinta decima primi Elemẽtorum. ergo angulus GDB ipſi LDH eſt æqualis. eſt autẽ & DBG rectus æqualis recto DLH. triangulum igitur DGB triangulo DHL ſimile erit.*

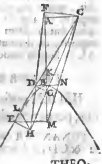
B Et qui ad H æquales ſunt.) *In ellipſi enim anguli ad H ſunt ſecundùm verticem. ſed in hyperbola idem eſt utrique communis. ergo & reliquus reliquo æqualis, & triangulum FCH triangulo GDH ſimile erit.*

C Ob ſimilitudinem triangulorum AFC, LCH.] *Nanque angulus FAC rectus eſt æqualis angulo CLH, qui rectus ponitur. & angulus FCA ipſi LCH æqualis ex antecedente. ergo triangulum AFC ſimile eſt triangulo LHC.*

D Vt autem DB ad CA, ita BK ad KA.) *Ob ſimilitudinem triangulorum DBK, CAK.*

E Et ut BK ad KA, ita erit BM ad MA.) *Eſt enim ex trigeſima ſexta primi huius, ut AK ad KB, ita AM ad MB, quare & convertẽdo ut BK ad KA, ita BM ad MA.*

F Sed ut BM ad MA. ita DE ad EC.) *Hoc in ellipſi perſpicuum eſt. ſed in hyperbola iungatur MC: & DB ad ipſam*
2 ſexti *producatur in N; erit ut BM ad MA, ita NM ad MC:*
4. ſexti. *ut autem NM ad MC, ita DE ad EC. ergo ut BM ad MA, ita DE ad EC.*



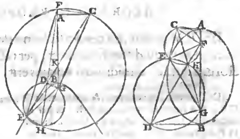
G Quare ut DL ad LC, ita DE ad EC, quod eſt abſurdum.] *Si enim fieri poteſt; ſit ut DL ad LC, ita DE ad EC: erit convertendo ut CL ad LD, ita CE ad ED: & dividendo ut CD ad DL, ita CD ad DE. ergo ex nona quinti DL eſt æqualis DE, pars toti, quod eſt abſurdum.*

THEO-

THEOREMA XLVIII. PROPOSITIO XLVIII.

IISDEM poſitis, oſtendendum eſt lineas, quæ à tactu ducuntur, ad puncta ex comparatione facta, æquales continere angulos ad contingentem.

PONANTVR eadem, quæ prius: & coniungantur E F, E G. Dico angulum C E F angulo G E D æqualem eſſe. Quoniam enim anguli D G H, D E H recti ſunt; circulus circa diametrum D H deſcriptus per puncta E, G tranſibit, quare ãgulus D H G æqualis erit angulo D E G in eadem enim portione conſiſtunt. Similiter & C E F angulus angulo C H F eſt æqualis, & angulus C H F



angulo D H G; quòd ſint ſecundùm verticem, angulus igitur C E F angulo A
G E D æqualis erit.

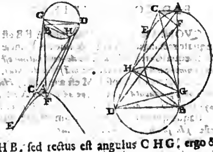
FED. COMMANDINVS.

QVOD ſint ſecundùm verticem.] *Intelligendum eſt hoc in ellipſi, nam in hyperbola eſt idem angulus.* A

THEOREMA XLIX. PROPOSITIO XLIX.

IISDEM poſitis, ſi ab aliquo punctorum ad contingentem perpendicularis agatur: quæ à facto puncto ducuntur ad axis extrema, rectos angulos continebunt.

PONANTVR eadem; & à puncto G ad C D ducatur perpendicularis G H; & A H, B H iungantur. Dico angulum A H B rectum eſſe. Quoniam enim angulus D B G, & D H G eſt rectus, ſi circa diametrum D G circulus deſcribatur; tranſibit per puncta H, B; & angulus G H B angulo B D G æqualis erit. angulus autem A G C oſtenſus eſt æqualis angulo B D G, ergo G H B angulus æqualis eſt angulo A G C, hoc eſt angulo A H C: & propterea angulus C H G angulo A H B, ſed rectus eſt angulus C H G, ergo & A H B rectus erit.



A

A

FED.

FED. COMMANDINVS.

A ANGVLVS autem A G C oſtenſus eſt æqualis angulo B D G.) *In 45. huius.*

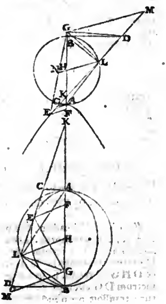
B Hoc eſt angulo A H C.) *Sunt enim anguli C A G, C H G recti. quare ſi circa diametrum C G circulus deſcribatur; per puncta A, H tranſibit: & anguli A G C, A H C in eadem circuli portione inter ſe æquales erunt.*

C Et propterea angulus C H G angulo A H B.] *Addito ſcilicet utrique angulo communi; in hyperbola quidem B H C, in ellipſi verò A H G angulo.*

THEOREMA L. PROPOSITIO L.

IISDEM poſitis, ſi à centro ſectionis ducatur linea contingenti occurrens; æquidiſtanſque lineæ, per tactum & per unum punctorum ductæ: dimidio axis æqualis erit.

SINT eadem, quæ ſupra; & centrum ſit H; iungatur autem E F; & lineæ D C, B A inter ſe conveniant in K; & per H ducatur H L æquidiſtans E F. Dico L H ipſi H B æqualem eſſe. Iungantur enim E G, A L, L G, L B: & per G ducatur G M ipſi E F
A æquidiſtans. Quoniam igitur rectangulum A F B eſt æquale rectangulo A G B: & linea A F lineæ G B æqualis erit. eſt autem & A H
B æqualis H B. ergo & F H ipſi H G: & propte-
C rea E L ipſi L M eſt æqualis. itaque quoniam demonſtratum eſt angulum C E F angulo
29. primi. D E G æqualem eſſe. eſtque angulus C E F æqualis angulo E M G: erit & E M G angulus ipſi M E G æqualis, & linea E G lineæ G M. ſed & E L eſt æqualis L M, ut demon-
D ſtravimus. linea igitur G L ad E M eſt per-
E pendicularis. eſt autem & angulus A L B rectus. quare ſi circa diametrum A B circulus deſcribatur; per punctum L tranſibit. atque eſt A H æqualis H B. ergo & H L, quæ eſt ex centro circuli, ipſi H B æqualis erit.



FED. COMMANDINVS.

A QVONIAM igitur rectangulum A F B eſt æquale rectangulo A G B: & linea A F lineæ G B æqualis erit.) *Hoc à nobis demonſtratum eſt in commentarijs in ſextam decimã ſecundi huius.*

B Et propterea E L ipſi L M eſt æqualis.) *Hoc in ellipſi manifeſtum eſt; in hyper-*
2. ſexti. *bola verò producatur L H uſque ad E G in N: & cùm F H ſit æqualis H G; erit E N æqualis N G. ut autem E N ad N G, ita E L ad L M. ergo E L ipſi L M æqualis erit.*

C Itaque quoniam demonſtratum eſt angulum C E F angulo D E G æqualem eſſe.) *In quadrageſima octava huius.*

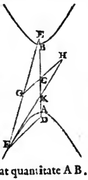
D Linea igitur G L ad E M eſt perpendicularis.] *Ex diffinitione lineæ perpendicularis. ſequitur enim ex dictis angulum G L E angulo G L M eſſe æqualem.*

E Eſt autem & angulus A L B rectus.) *Ex antecedente.* THEO-

Digitized by Google

THEOREMA LI. PROPOSITIO LI.

SI in hyperbola, vel oppoſitis ſectionibus ad axem comparetur rectangulum æquale quartæ parti figuræ, excedéſque figura quadrata; & à punctis ex comparatione factis ad quamlibet ſectionem rectæ lineæ inclinentur: maior minoré quantitate axis ſuperabit.



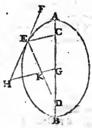
SIT hyperbole, vel oppoſitæ ſectiones, quarum axis A B,
centrum C: & quartæ parti figuræ æquale ſit utrunque rectã-
gulorum A D B, A E B: & à punctis E, D ad ſectionem incli-
nentur E F, F D. Dico E F ipſam F D ſuperare quantita-
te A B. Ducatur enim per F linea F K H ſectionem contin-
gens: & per C ducatur G C H æquidiſtans F D. erit angulus 29 primi.
K H G angulo K F D æqualis; alterni enim ſunt: & angulus K A
F D æqualis angulo G F H. ergo & G F H ipſi G H F, lineaque
F G lineæ G H, & linea F G ipſi G E æqualis erit: quòd & B
A E æqualis ſit D B, & A C ipſi C B, & D C ipſi C E. eſt
igitur linea G H æqualis G E: & ob id F E ipſius G H dupla.
Itaque quoniam demonſtrata eſt C H ipſi C B æqualis: erit C
E F utriuſque G C, C B dupla. ſed ipſius quidem G C du- D
pla eſt F D; ipſius verò C B dupla A B. linea igitur E F utri-
que F D, A B eſt æqualis: & propterea E F ipſam F D ſuperat quantitate A B.

FED. COMMANDINVS.

ET angulus K F D æqualis angulo G F H.) *Ex quadrageſima octava huius.* A
Quòd & A E æqualis ſit D B.) *Superius enim demonſtravimus E B ipſi A D æ-* B
qualem eſſe. quare addita utrique A B, erit A E æqualis B D: vereor tamen, ne potius legendũ ſit: Quòd & A D æqualis ſit B E. hoc enim ad propoſitũ magis attinere videtur.
Itaque quoniam demonſtrata eſt C H ipſi C B æqualis.] *In antecedente ſcilicet.* C
Sed ipſius quidem G C dupla eſt F D.) *Eſt enim ut F E ad E G, ita F D ad G C.* D 4. ſexti.
ſed F E dupla eſt E G. ergo & F D ipſius G C dupla.

THEOREMA LII. PROPOSITIO LII.

SI in ellipſi ad maiorem axem ex utraque parte comparetur rectangulum æquale quartæ parti figuræ, deficienſque figura quadrata; & à punctis ex comparatione factis ad ſectionem rectæ lineæ inclinentur: ipſi axi æquales erunt.



SIT ellipſis, cuius maior axis A B; & ſit utrunque re-
ctangulorum A C B, A D B æquale quartæ parti figuræ: &
à punctis C, D ad ſectionem inclinentur rectæ lineæ C E,
E D. Dico C E, E D axi A B æquales eſſe. Ducatur enim
linea contingens E F H: & per centrum, quod ſit G, duca-
tur G K H ipſi C E æquidiſtans. Quoniam igitur angulus A
C E F eſt æqualis angulo H E K, & angulus F E C angulo
E H K: & E H K angulus ipſi H E K æqualis erit; & linea
H K æqualis lineæ K E. & quoniam A G eſt æqualis G B,
& A C ipſi D B: erit & C G ipſi G D æqualis. ergo & E K 2 ſexti.
æqualis K D. & ob id linea quidem E D dupla eſt H K; li- B

nea

nea verò E C dupla K G. utraque igitur C E, E D ipſius H G eſt dupla, ſed &
C A B dupla H G. quare A B ipſis C E, E D æqualis erit.

FED. COMMANDINVS.

A QVONIAM igitur angulus C E F eſt æqualis angulo H E K.] *Ex quadrageſima octava huius.*

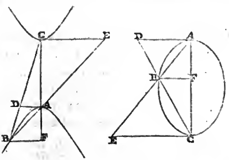
B Et ob id linea quidem E D dupla eſt H K.] *Eſt enim D E dupla E K, hoc eſt H K, qua ipſi K E æqualis demonſtrata eſt.*

C Sed & A B dupla H G.) *In quinquageſima enim huius demonſtrauit H G æqualem eſſe G A.*

THEOREMA LIII. PROPOSITIO LIII.

SI in hyperbola, vel ellipſi, vel circuli circunferentia, vel ſectionibus oppoſitis ab extremo diametri ducantur lineæ ordinatim applicatis æquidiſtantes; & à dictis terminis ad idem ſectionis punctum lineæ ductæ ſecent æquidiſtantes: rectangulum ex abſciſſis factum æquale erit figuræ, quæ ad eandem diametrum conſtituitur.

SIT una dictarum ſectionum A B C, cuius diameter A C: ducanturque A D, C E ordinatim applicatis æquidiſtantes; & A B E, C B D producantur. Dico rectangulum contentum A D, C E figuræ, quæ fit ad A C, æquale eſſe. A puncto
A enim B linea B F ordinatim applicetur. Ergo ut rectangulum A F C ad quadra-
B tum F B, ita tranſverſum figuræ latus ad rectum; & ita quadratum A C ad
23. ſexti. ipſam figuram. ſed rectanguli
C A F C ad quadratum F B proportio componitur ex proportione A F ad F B, & proportione C F ad F B. ergo proportio figuræ ad quadratum A C compoſita eſt ex proportione B F ad F A, & proportione B F ad F C. ut autem
D A F ad F B, ita A C ad C E: & ut C F ad F B, ita C A ad
E A D. proportio igitur figuræ ad quadratum A C componitur ex proportione E C ad C A,



23. ſexti. & D A ad A C. ſed rectangulum contentum A D, C E ad A C quadratum ex eiſdem proportionibus componitur. ergo ut figura ad quadratum, ita eſt rectangulum contentum A D, C E ad quadratum A C. rectangulum igitur contentum A D, C E figuræ, quæ fit ad A C, æquale erit.

FED. COMMANDINVS.

A ERGO ut rectangulum A F C ad quadratum F B, ita tranſverſum figuræ latus ad rectum.] *Ex vigeſimaprima primi huius.*

Et ita

Et ita quadratum A C ad ipſam figuram.] *Eſt enim ut tranſverſum latus ad rectum, ita quadratum tranſverſi lateris, hoc eſt quadratum A C ad rectangulum dictis lateribus contentum, hoc eſt ad figuram ipſam, ex prima ſexti; vel ex lemmate in 22. decimi Elementorum.* B

Ergo proportio figuræ ad quadratum A C compoſita eſt ex proportione B F ad F A; & proportione B F ad F C.) *Quoniam enim ut rectangulum A F C ad quadratum F B, ita quadratum A C ad ipſam figuram: erit convertendo ut quadratum F B ad rectangulum A F C, ita figura ipſa ad quadratum A C; ſed proportio quadrati F B ad rectangulum A F C componitur ex proportione B F ad F A, & B F ad F C. ergo & proportio figuræ ad quadratum A C ex eiſdem proportionibus componitur.* C

Vt autem A F ad F B, ita A C ad C E; & ut C F ad F B, ita C A ad A D.] *Ex quarta ſexti ob ſimilitudinem triangulorum A B F, A E C; & triangulorum C H F, C D A.* D

Proportio igitur figuræ ad quadratum A C componitur ex proportione E C ad C A, & D A ad A C.) *Nam converſa proportio ex eiſdem proportionibus converſis componitur, ut ſuperius probatum eſt: vereor tamen ne hæc propoſitio ab aliquo inverſa ſit. manifeſtior enim eſſet, ſi hoc modo explicaretur.* E

A puncto enim B linea B F ordinatim applicetur. ergo ut quadratum F B ad rectangulum A F C, ita rectum figuræ latus ad tranſverſum, & ita figura ipſa ad quadratum A C. ſed proportio quadrati F B ad rectangulum A F C componitur ex proportione B F ad F A, & proportione B F ad F C. ergo & proportio figuræ ad quadratum A C ex eiſdem proportionibus componitur. ut autem B F ad F A, ita E C ad C A: & ut B F ad F C, ita D A ad A C. proportio igitur figuræ ad quadratum A C compoſita eſt ex proportione E C ad C A, & proportione D A ad A C. & reliqua, quæ deinceps ſequuntur.

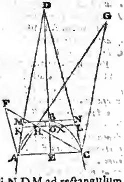
THEOREMA LIV. PROPOSITIO LIV.

SI coni ſectionem, vel circuli circunferentiam contingentes duæ rectæ lineæ ſibi ipſis occurrant; & per tactus ducantur contingentibus æquidiſtantes; à tactibus verò ad idem ſectionis punctum ductæ lineæ æquidiſtantes ſecent: rectangulum, ex abſciſſis conſtans, ad quadratum lineæ, tactus coniungentis, proportionem habebit compoſitam ex proportione, quam habet quadratum portionis lineæ, ab occurſu contingentium ad punctum medium coniungentis tactus ductæ, quæ eſt intra ſectionem, ad reliquæ portionis quadratum; & ex proportione, quam habet rectangulum ex contingentibus factum ad quartam partem quadrati lineæ tactus coniungentis.

SIT coni ſectio, vel circuli circunferentia A B C; quam contingant rectæ lineæ A D, D C: & iuncta A C, biſariam in puncto E dividatur; iungaturque D B E: a puncto autem A ducatur linea A F ipſi C D æquidiſtans; & a puncto C linea C G æquidiſtans A D: denique ſumpto in ſectione quovis puncto H, iungantur A H, C H; & ad puncta G, F producantur. Dico rectangulum, conſtans ex A F, C G, ad quadratum A C proportionem habere compoſitam ex proportione quadrati E B ad quadratum B D, & proportione rectanguli A D C ad quar-

Digitized by Google

tam partem quadrati A C, hoc eſt ad rectangulum A E C. Ducatur enim à puncto quidem H linea H K L X O: a puncto autem B linea B M N, quæ ipſi
A B A C æquidiſtent. perſpicuum eſt lineam M N ſectionem contingere. & cùm A E
C ſit æqualis E C; erit & M B ipſi B N æqualis, & K O ipſi O L, & H O ipſi O X,
D E & K H ipſi X L. Itaque quoniam B M, M A ſectionem contingunt; & ipſi M B æquidiſtans ducta eſt K H L: erit ut quadratum A M ad quadratum M B, hoc eſt ad rectangulum M B N, ita A K quadratum ad rectangulum X K H, hoc eſt ad rectangulum L H K: & permutando ut quadratum A M ad quadratum A K,
F ita M B N rectangulum ad rectangulum L H K. ut autem rectãgulum ex N C, M A ad quadratum A M, ita rectangulum ex L C, K A ad quadratum A K. ergo ex æquali ut rectangulũ ex N C, M A ad rectangulũ M B N, ita rectangulum ex L C, K A ad rectangulum L H K. ſed rectangulum ex L C, K A ad rectangulum
G L H K proportionem habet compoſitam ex proportio-
H ne C L ad L H, hoc eſt F A ad A C; & proportione A K ad K H, hoc eſt G C ad C A: hæc autem eadem eſt, quæ proportio rectanguli ex G C, F A ad quadratum A C. ut igitur rectangulum ex N C, M A ad rectangulum M B N, ita rectangulum ex G C, F A ad quadratum A C. rectangulum verò ex N C, M A ad rectangulum M B N, ſumpto medio rectangulo N D M, habet proportionem compoſitam ex proportione rectanguli ex N C, M A ad rectangulum N D M, & proportione rectanguli N D M ad rectangulum M B N. ergo & rectangulum ex G C, F A ad quadratum A C compoſitam habet proportionem ex proportione rectanguli ex N C, M A ad rectangulum N D M,
K & proportione rectanguli N D M ad rectangulum M B N. ſed ut rectangulum ex N C, M A ad rectangulum N D M, ita quadratum E B ad quadratum B D:
L & ut rectangulum N D M ad rectangulum M B N, ita rectangulum C D A ad rectangulum A E C. rectangulum igitur ex G C, F A ad quadratum A C compoſitam proportionem habet ex proportione quadrati E B ad B D quadratum, & proportione rectanguli C D A ad rectangulum A E C.



E V T O C I V S.

F VT autem rectangulum ex N C, M A ad quadratum A M, ita rectangulum ex L C, K A ad quadratum A K.] *Quoniam enim ut A D ad D M, ita C D ad D N: erit per conuerſionem rationis ut D A ad A M, ita D C ad C N. eadem quoque ratione & conuertendo demonſtrabitur ut K A ad A D, ita L C ad C D. ergo ex æquali & conuertendo ut M A ad A K, ita N C ad C L: & permutando ut M A ad N C, ita A K ad C L. ut igitur rectangulum ex N C, M A ad quadratum A M, ita rectangulum ex L C, K A ad quadratum A K.*

K Sed ut rectangulum ex N C, M A ad rectangulum N D M, ita quadratum E B ad quadratum B D.] *Nam cùm rectangulum ex A M, C N ad rectangulum N D M compoſitam proportionem habeat ex proportione A M ad M D, & proportione C N ad N D; ut autem A M ad M D, ita E B ad B D; & ut C N ad N D, ita E B ad B D: habebit rectangulum ex A M, C N ad rectangulum N D M proportio-*
20. ſexti. *nem duplam eius, quæ eſt E B ad B D. ſed & quadratum E B ad quadratum B D duplam proportionem habet eius, quæ eſt E B ad B D. quare ut rectangulum ex A M, C N ad rectangulum N D M, ita quadratum E B ad B D quadratum.*

L Et ut rectangulum N D M ad rectangulum M B N, ita rectangulum C D A ad rectangulum A E C.) *Quoniam enim rectangulum N D M ad rectangulum*

M B N

M B N proportionem habet compoſitam ex proportione D N ad N B, & proportione D M ad M B; ut autem D N ad N B, ita D C ad C E; & ut D M ad M B, ita D A ad A E: habebit quoque proportionem compoſitam ex proportione D C ad C E, & proportione D A ad A E; quæ quidem proportio eadem eſt, quam rectangulum C D A habet ad rectangulum A E C. ut igitur rectangulum N D M ad rectangulum M B N, ita rectangulum C D A ad rectangulum A E C. 4. ſexti.

FED. COMMANDINVS.

A PERSPICVVM eſt lineam M N ſectionem contingere.] *Ex 32. primi huius.*

B Et cùm A E ſit æqualis E C; erit & M B ipſi B N æqualis, & K O ipſi O L.) *Ex demonſtratis in ſextam primi huius.*

C Et H O ipſi O X.] *Ex quadrageſima ſexta, & quadrageſima ſeptima primi huius.*

D Et K H ipſi X L.) *Quoniam enim K O eſt æqualis O L, & H O ipſi O X: erit & reliqua K H reliquæ X L æqualis.*

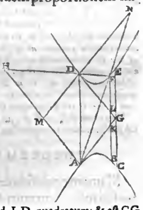
E Itaque quoniam M B, M A ſectionem contingunt; & ipſi M B æquidiſtans ducta eſt K H L: erit ut quadratum A M ad quadratum M B, hoc eſt ad rectangulum M B N, ita A K quadratũ ad rectangulum X K H) *Ex ſexta decima huius.*

G Ex proportione C L ad L H, hoc eſt F A ad A C.) *Ob ſimilitudinem triangulorum L H C, C F A. eſt enim angulus L C H æqualis angulo A F C. & angulus L H C angulo F C A. quare & reliquus reliquo eſt æqualis.*

H Et proportione A K ad K H, hoc eſt G C ad C A.] *Sũt enim triangula K H A, A C G inter ſe ſimilia.*

THEOREMA LV. PROPOSITIO LV.

SI oppoſitas ſectiones duæ rectæ lineæ contingẽtes ſibi ipſis occurrant; & per occurſum ducatur linea, coniungenti tactus æquidiſtans; per tactus verò ducantur æquidiſtantes contingẽtibus; & à tactibus ad idem alterius ſectionis punctum ducantur lineæ, quæ æquidiſtantes ſecent: rectangulum, ex abſciſſis conſtans, ad quadratum lineæ tactus coniungentis eandem proportionem habebit, quam rectangulum, ex contingentibus factum, ad quadratum lineæ, ab occurſu ad ſectionem ductæ, quæ quidem contingenti tactus æquidiſtet.



SINT oppoſitæ ſectiones A B C, D E F; quas contingant rectæ lineæ A G, G D: & iuncta A D, ducatur per G linea C G E, ipſi A D æquidiſtans; & à puncto A ducatur A M æquidiſtans D G; atque à D linea D M æquidiſtans A G. Sumatur autem in ſectione D F aliquod punctum F: & iungantur A F N, D F H. Dico ut quadratum C G ad rectangulum A G D, ita eſſe A D quadratum ad rectangulum ex A H, N D. Ducatur enim per F linea F L K B, quæ ipſi A D æquidiſtet. Quoniam igitur demonſtratum eſt, ut quadratum E G ad quadratum G D, ita rectangulum B L F ad L D quadratum; & eſt C G æqualis G E, & B K ipſi L F: erit ut quadratum C G ad quadratum G D, ita A B

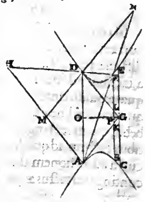
 rectan-

D rectangulum K F L ad quadratum L D. eſt autem & ut quadratum D G ad rectangulum D G A, ita quadratum D L ad rectangulum ex D L, A K. ergo ex æquali ut quadratum C G ad rectangulum D G A, ita rectangulum K F L ad rectangulum ex D L, A K. ſed proportio rectanguli K F L ad rectangulum ex D L, A K componitur ex proportione F K ad K A, & proportione F L ad L D:
E ut autem F K ad K A, ita A D ad D N; & ut F L ad L D, ita D A ad A H. proportio igitur quadrati C G ad rectangulum D G A compoſita eſt ex proportione A D ad D N, & proportione D A ad A H. ſed quadrati A D ad rectangulum ex A H, N D proportio ex eiſdem componitur. ergo ut quadratum C G ad rectangulum A G D, ita eſt A D quadratum ad rectangulum ex A H, N D: & convertendo ut rectangulum A G D ad quadratum C G, ita rectangulum ex A H, N D ad quadratum A D.

FED. COMMANDINVS.

A DICO ut quadratum C G ad rectangulum A G D, ita eſſe A D quadratum ad rectangulum ex A H, N D.) *Sic habent Græci codices: ſed ego potius ita legendum arbitror. Dico ut rectangulum A G D ad C G quadratum, ita eſſe rectangulum ex A H, N D ad quadratum A D. hoc enim eſt, quod & in principio proponit, & in fine concludit.*

B Quoniam igitur demonſtratum eſt, ut quadratum E G ad quadratum G D, ita rectangulum B L F ad L D quadratum.) *In vigeſima huius.*



C Et eſt C G æqualis G E: & B K ipſi L F.) *Secetur linea A D bifariam in puncto O, & iungatur G O, quæ lineam B F in P ſecet. erit O G oppoſitarum ſectionum diameter recta; tranſverſa verò, quæ per centrum ducitur, ipſi A D æquidiſtans. ergo C G eſt æqualis G E, & B P ipſi P F. ſed & K P æqualis eſt P L, quoniam & A O ipſi O D. reliqua igitur B K reliqua L F eſt æqualis.*

D Eſt autem & ut quadratum D G ad rectangulum D G A, ita quadratum D L ad rectangulum ex D L, A K.] *Quoniam enim æquidiſtant A D,*
5.ſexti. *B F: ut D L ad L G, ita erit A K ad K G: componendoque ut D G ad G L, ita A G ad G K: & per converſionem rationis ut G D ad D L, ita G A ad A K: & permutando ut D G ad G A, ita D L ad A K. ut verò D G ad G A, ita quadratum D G ad*
16. in 21. decimi. *rectangulum D G A: & ut D L ad A K, ita D L quadratum ad rectangulum ex D L & A K. ergo ut quadratum D G ad rectangulum D G A, ita quadratum D L ad rectangulum ex D L & A K.*

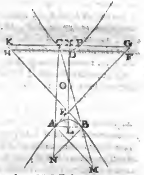
E Vt autem F K ad K A, ita A D ad D N: & ut F L ad L D, ita D A ad A H.) *Ob ſimilitudinem triangulorum A F K, N A D; itemque triangulorum L F D, A D H.*

THEOREMA LVI. PROPOSITIO LVI.

SI unam oppoſitarum ſectionum duæ rectæ lineæ contingentes ſibi ipſis occurrant; & per tactus ducantur contingentibus æquidiſtantes; à tactibus verò ad idem alterius ſectionis punctum ducan-

ducantur lineæ, quæ æquidiſtantes ſecent: rectangulum, ex abſciſſis conſtans, ad quadratum lineæ, tactus coniungentis, proportionem habebit compoſitam ex proportione, quam habet quadratum portionis lineæ, ad punctum medium coniungẽtis tactus ductæ, quæ eſt inter dictum punctum & alteram ſectionem, ad quadratum eius, quæ inter ſectionem & occurſum interijcitur; & ex proportione, quam habet rectangulum, ex contingentibus factum, ad quartam partem quadrati lineæ tactus coniungentis.

SINT oppoſitæ ſectiones A B, C D, quarum centrum O; lineæque contingentes A E F G, B E H K: & iuncta A B dividatur bifariam in L; & iungatur L E, & ad D producatur: à puncto autem A ducatur A M ipſi B E æquidiſtans; & à puncto B ducatur B N æquidiſtans A E: denique ſumpto in C D ſectione quovis puncto C, iungantur C B M, C A N. Dico rectangulum, ex B N, A M conſtans, ad quadratum A B proportionem habere compoſitam ex proportione quadrati L D ad quadratum D E, & proportione rectanguli A E B ad quartam partem quadrati A B, hoc eſt ad rectangulum A L B. Ducantur enim à punctis C, D lineæ C G K, D H F, quæ æquidiſtent A B. Cùm A
igitur A L ſit æqualis L B; erit & H D ipſi D F æqualis, & K X ipſi X G. ſed B
C X eſt æqualis X P. ergo & K C ipſi P G. & quoniam A B, C D oppoſitæ ſe- C
ctiones ſunt; lineæque contingentes B E H K, A E F G; & ducta eſt K G æquidiſtans H D: erit ut quadratum B H ad quadratum H D, ita quadratum B K ad rectangulum P K C. quadratum autem H D eſt æquale rectan- D
gulo H D F: & rectangulum P K C rectangulo K C G. ergo ut quadratum B H ad rectangulum H D F, ita quadratum B K ad rectangulum K C G. ſed & ut rectangulum ex F A, H B ad quadratum E
H B, ita rectangulum ex G A, K B ad quadratum K B. ex æquali igitur ut rectangulum ex A F, H B ad rectangulum H D F, ita rectangulũ ex A G, K B ad rectangulum K C G. proportio autem rectanguli ex A F, H B ad rectangulum H D F, ſumpto medio rectangulo H E F, componitur ex proportione rectanguli ex A F, H B ad rectangulum H E F, & proportione rectanguli H E F ad rectangulum



H D F. ſed ut rectangulum ex A F, H B ad rectangulum H E F, ita quadratum F
L D ad quadratum D E: & ut rectangulum H E F ad rectangulum H D F, ita G
rectangulum A E B ad rectangulum A L B. ergo proportio rectanguli ex A G, K B ad rectangulum K C G compoſita eſt ex proportione quadrati L D ad quadratum D E, & proportione rectanguli A E B ad rectangulum A L B. habet autem rectangulum ex A G, K B ad rectangulum K C G proportionem compoſitam ex proportione B K ad K C, & proportione A G ad G C: utque B K ad K C, ita eſt M A ad A B; & ut A G ad G C, ita N B ad B A. proportio igitur compoſita ex proportione M A ad A B, & proportione N B ad B A [quæ quidem eadem eſt, quam habet rectangulum ex A M, B N ad quadratum A B] componitur ex proportione quadrati L D ad quadratum D E, & proportione rectanguli A E B ad rectangulum A L B.

FED.

Digitized by Google

FED. COMMANDINVS.

A CVM igitur A L ſit æqualis L B; erit H D ipſi D F æqualis, & K X ipſi X G.) *Ob ſimilitudinem triangulorum A E L, F E D, G E X: & triangulorum B E L, H E D, K E X.*

B Sed eſt C X æqualis X P. ergo & K C ipſi P G.] *C X eſt æqualis X P ex quadrageſima ſeptima primi huius. quare & reliqua K C reliquæ P G æqualis erit.*

C Et quoniam A B, C D oppoſitæ ſectiones ſunt; lineæque contingentes B E H K, A E F G; & ducta eſt K G æquidiſtans H D: erit ut quadratum B H ad quadratum H D, ita quadratum B K ad rectangulum P K C.] *Ex decima octaua huius.*

D Quadratum autem H D eſt æquale rectangulo H D F: & rectangulum P K C rectangulo K C G.) *Nam H D eſt æqualis D F, ut demonſtratum eſt, & G C ipſi P K.*

E Sed & ut rectangulum ex F A, H B ad quadratum H B, ita rectangulum ex G A, K B ad quadratum K B.] *Quoniam enim triangula A E B, H E F, K E G ſimilia ſunt: erit ut F E ad E A, ita H E ad E B; & componendo ut F A ad A E, ita H B ad B E. eadem quoque ratione demonſtrabimus ut G A ad A E, ita K B ad B E. quare & conuertendo ut E A ad A G, ita E B ad B K. erat autem ut F A ad A E, ita H B ad B E. ergo ex æquali ut F A ad A G, ita H B ad B K: & permutando ut F A ad H B, ita G A ad K B. ſed ut F A ad H B, ita rectangulum ex F A, H B ad quadratum H B: & ut G A ad K B, ita rectangulum ex G A, K B ad quadratum K B ex prima ſexti, vel ex lemmate in 22. decimi. ut igitur rectangulum ex F A, H B ad quadratum H B, ita rectangulum ex G A, K B ad quadratum K B.*

F Sed ut rectangulum ex A F, H B ad rectangulum H E F, ita quadratum L D ad quadratum D E.) *Nam rectangulum ex A F, H B ad rectangulum H E F proportionem habet compoſitam ex proportione A F ad F E, & proportione B H ad H E. ut autem A F ad F E, ita L D ad D E; & ut B H ad H E, ita L D ad D E. rectangulum igitur ex A F, H B ad rectangulum H E F duplam proportionem habet eius, quæ eſt L D ad D E. ſed & quadratum L D ad quadratum D E proportionem habet eiuſdem proportionis duplam. ergo ut rectangulum ex A F, H B ad rectangulum H E F, ita quadratum L D ad quadratum D E.*

G Et ut rectangulum H E F ad rectangulum H D F, ita rectangulum A E B ad rectangulum A L B.) *Rectangulum enim H E F ad rectangulum H D F proportionem compoſitam habet ex proportione E H ad H D, & proportione E F ad F D. ut autem E H ad H D, ita E B ad B L; & ut E F ad F D, ita E A ad A L. quare rectangulum H E F ad rectangulum H D F proportionem quoque compoſitam habebit ex proportione E B ad B L, & proportione E A ad A L; quæ quidem proportio eadem eſt, quam habet rectangulum A E B ad rectangulum A L B. ergo ut rectangulum H E F ad rectangulum H D F, ita erit rectangulum A E B ad rectangulum A L B. hoc etiam ex quartadecimo lemmate Pappi conſtare poteſt.*

TERTII LIBRI FINIS.

APOLLONII PERGÆI

CONICORUM LIBER IV.

CUM COMMENTARIIS EUTOCII ASCALONITÆ, ET FEDERICI COMMANDINI.

APOLLONIUS ATTALO S. D.

PRIUS quidem ex octo libris, quos de conicis compoſuimus, tres primos edidi ad Eudemum Pergamenum ſcriptos: eo autem mortuo, cùm reliquos ad te mittere decreverimus; quòd meorum ſcriptorum lectionem ambitioſe deſideras, in præſentia quartum librum mittimus. In eo hæc continentur, ad quot puncta plurima conorum ſectiones inter ſeſe, & circuli circunferentiæ occurrere poſſint, niſi totæ totis congruant. Præterea coni ſectio, & circuli circunferentia, & oppoſitæ ſectiones oppoſitis ſectionibus ad quot puncta plurima occurrant. Ad hæc alia non pauca his ſimilia. Ex his, quod primo loco dictum eſt, Conon Samius ad Traſideum ſcribens explicavit, non rectè in demonſtrationibus verſatus. Itaque Nicoteles Cyrenæus eum leviter reprehendit. De ſecundo Nicoteles in libro contra Cononem mentionem ſic fecit, tanquam quòd demonſtrari facilè poſſet. Sed tamen nos neque ab ipſo, neque ab alio quopiam demonſtratum invenimus. Tertium verò, & eiuſdem generis alia, ne in mentem quidem alicui unquàm veniſſe comperimus. Vt quæ diximus ab alijs demonſtrata non fuiſſe, omnia multis, ac varijs noviſque theorematibus indigent, quorum plurima in tribus primis libris, reliqua in hoc expoſuimus. Horum

igitur

igitur contemplatio non parvam utilitatem affert, & ad compoſitiones problematum, & ad determinationes. Nicoteles quidem ob diſſenſionem, quæ illi cum Conone erat, ſcribit nihil eorum, quæ à Conone inventa ſunt, ad determinationes pertinere. quod ille falſò affirmat; nam & ſi omnino abſque his determinationes reddere poſſimus: tamen ex his ipſis non nulla faciliùs percipiuntur; velut hoc, quòd aliquid multipliciter fiat, vel quotupliciter, vel rurſus quòd nullo modo fiat: quæ quidem cognitio, ſi anteceſſerit, ad quæſtiones magnam præſtat facultatem. Præterea ad diffinitionum reſolutiones theoremata hæc valde utilia ſunt: quæ, etiamſi abſit utilitas, propter ipſas demonſtrationes digna ſunt, ut recipiantur. multa enim alia in Mathematicis diſciplinis ob hoc ipſum, & non ob aliquod aliud recipere conſuevimus.

EVTOCIVS.

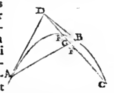
QVARTVS liber, Anthemi ſodalis chariſſime, quæſtionem quidem habet, quot modis conorum ſectiones inter ſeſe, & circuli circunferentia, itemque oppoſitæ ſectiones oppoſitis ſectionibus occurrant: ſed eſt tamen elegans, & legentibus perſpicuus, præſertim ex editione noſtra; ac ne commentarijs quidem ullis indiget. quod enim deeſt ipſæ explent adſcriptiones. In eo autem omnia demonſtrantur argumentatione ducente ad id, quod fieri non poteſt; ſicut & Euclides fecit in ijs, quæ de ſectionibus, circulo, & tactionibus conſcripſit: quæ ſanè ratio & ad uſum accommodata, & neceſſaria Ariſtoteli, ac Geometris, præcipuè verò Archimedi viſa eſt. Itaque tibi quatuor libros perlegenti licebit ex conicorum tractatione reſolvere, & componere quodcunque propoſitum fuerit. Quocirca & ipſe Appollonius in principio libri dixit, quatuor libros ad huius diſciplinæ elementa ſufficere: reliquos autem quatuor ad abundantiorem ſcientiam pertinere. Perlege igitur eos diligenter: & ſi tibi placuerit, reliquos ad eandem formam à nobis edi; id quoque, Deo duce, fiet. Vale.

THEOREMA I. PROPOSITIO I.

SI in coni ſectione, vel circuli circunferentia aliquod punctum extra ſumatur; atque ab eo ad ſectionem ducantur duæ rectæ lineæ, una quidem contingens, altera verò in duobus punctis ſecans; & quam proportionem habet tota linea ſecans ad partem ſui ipſius, quæ extra ſumitur, inter punctum & ſectionem interiecta, in eadem dividatur, quæ eſt intra; ita ut rectæ lineæ eiuſdem rationis ad unum punctum conveniant: quæ à tactu ad diviſionem ducitur, occurret ſectioni; & quæ ab occurſu ducitur ad punctum extra ſumptum, ſectionem continget.

SIT coni ſectio, vel circuli circunferentia A B C; & puncto extra ſectionem ſum-

ſumpto, quod ſit D, ab eo ducatur linea D B quidem contingens ſectionem in B; D E C verò in punctis E,C ſecans: & quam proportionem habet C D ad D E, eandem habeat C F ad F E. Dico lineam, quæ à puncto B ad F ducitur, occurrere ſectioni; & quæ ab occurſu ducitur ad D, ſectionem contingere. Quoniam enim linea D C ſectionem in duobus punctis ſecat: non erit ipſius diameter. quare licebit per D & diametrum, & lineam contingentem ducere. ducatur à puncto D linea D A ſectionem contingens: & iuncta B A ſecet ipſam E C non in F, ſed in alio puncto G, ſi fieri poſſit. Itaque quoniam lineæ B D, D A ſectionem contingunt; A & ad tactus ducta eſt B A; linea verò C D ſectionem in punctis C,E ſecat; & ipſam A B ſecat in G: erit ut C D ad D E, ita C G ad G E, quod eſt abſurdum. B poſuimus enim, ut C D ad D E, ita eſſe C F ad F E. non igitur B A ſecat E C in alio puncto, quare in ipſo F ſecet neceſſe eſt.



FED. COMMANDINVS.

A ITAQVE quoniam lineæ B D, D A ſectionem contingunt; & ad tactus ducta eſt B A; linea verò C D ſectionem in punctis C,E ſecat; & ipſam A B ſecat in G: erit ut C D ad D E, ita C G ad G E.] *Ex trigeſima ſeptima tertij huius.*

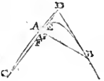
B Quod eſt abſurdum.) *Nam cum poſuerimus C F ad F E, ut C D ad D E: eſſet C G ad G E, ut C F ad F E; & permutando G C ad C F, ut G E ad E F. eſt autem G C maior, quàm C F. & ergo G E maior, quàm E F. ſed & minor. quod fieri non poteſt.*

THEOREMA II. PROPOSITIO II.

HÆC quidem communiter in omnibus ſectionibus demonſtrata ſunt: at in ſola hyperbola, ſi linea D B ſectionem contingat; & D C in punctis E,C ſecet; puncta verò E,C contineāt tactum ad B; & punctum D ſit intra angulum aſymptotis comprehenſum: ſimiliter fiet demonſtratio. poſſumus enim à puncto D aliam ducere contingentem D A, & quæ reliqua ſunt ad demonſtrationem, perficere.

THEOREMA III. PROPOSITIO III.

IISDEM exiſtentibus, puncta E, C tactum ad B non contineāt; ſitque punctum D intra angulum aſymptotis comprehenſum: poterimus à puncto D alteram contingentem ducere, quæ ſit D A, & reliqua ſimiliter demonſtrare.

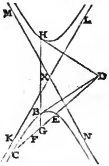


THEOREMA IV. PROPOSITIO IV.

IISDEM poſitis, ſi occurſus E C contineant tactum ad B: &

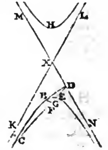
Digitized by Google

pū̃ctum D ſit in angulo, qui deinceps eſt angulo aſymptotis comprehenſo: linea, quæ à tactu ad diviſionem ducitur, occurret oppoſitæ ſectioni; & quæ ab occurſu ducitur eandem ſectionem continget.



SINT oppoſitæ ſectiones B, H; quarum aſymptoti K L, M X N; & punctum D ſit in angulo L X N: ab eo autem ducta linea D B ſectionem contingat, & D C ſecet; ita ut occurſus E, C tactum ad B contineant: & quam proportionem habet C D ad D E, habeat C F ad F E. Demonſtrandum eſt lineam, quæ à puncto B ad F ducitur, occurrere ſectioni H: & quæ ab occurſu ducitur ad D ſectionem contingere. Ducatur enim à puncto D linea D H ſectionem contingens: & iuncta H B, ſi fieri poſſit, non tranſeat per F, ſed per aliud punctum
35. tertii huius. G. eſt igitur ut C D ad D E, ita C G ad G E; quod eſt abſurdū: poſuimus enim ut C D ad D E, ita eſſe C F ad F E.

THEOREMA V. PROPOSITIO V.

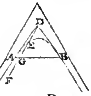


IISDEM poſitis, ſi punctum D ſit in una aſymptoton; quæ à puncto B ad F ducitur, eidem aſymptoto æquidiſtabit.

PONANTVR enim eadem; & punctum D ſit in aliqua aſymptoton, videlicet in M N. Demonſtrandum eſt lineam, quæ à puncto B ipſi M N æquidiſtans ducitur, in punctum F cadere. Non enim, ſed ſi fieri poteſt, ſit
37 tertii huius. B G. erit igitur ut C D ad D E, ita C G ad G E; quod eſt abſurdum.

THEOREMA VI. PROPOSITIO VI.

SI in hyperbola aliquod punctum extra ſumatur, à quo ad ſectionem ducantur duæ rectæ lineæ; altera quidem contingens, altera verò æquidiſtans uni aſymptoton; & portio æquidiſtantis, inter ſectionem & punctum interiecta, æqualis ſit ei, quæ intra ſectionem continetur: linea, quæ à tactu ad factum punctum ducitur occurret ſectioni; & quæ ab occurſu ducitur ad punctum extra ſumptum ſectionem continget.



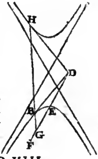
SIT hyperbole A E B, & ſumatur aliquod punctum extra, quod ſit D: ſit autem primò D intra angulum aſymptotis contentum; & ab ipſo D linea quidem D B ducta ſectionem contingat; D E F verò æquidiſtet alteri aſymptoton: ponaturque ipſi D E æqualis E F. Dico lineam, quæ à puncto B ad F ducitur, occurrere ſectioni, & quæ ab occurſu ducitur ad D, ſectionem contingere.

Duca-

Digitized by Google

Ducatur enim D A, quæ ſectionem contingat: & iuncta B A ſecet ipſam D E, ſi fieri poteſt, non in F, ſed in alio puncto G. erit D E æqualis E G; quod eſt abſurdum. ponebatur enim D E ipſi E F æqualis. 30. tertii huius.

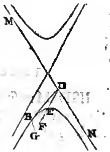
THEOREMA VII. PROPOSITIO VII.



IISDEM poſitis, ſit punctum D in angulo deinceps ei, qui aſymptotis continetur. Dico etiam ſic eadem evenire.

DVCATVR enim D H ſectionem contingens, & iuncta H B, ſi fieri poteſt, non cadat in F, ſed in aliud punctum G. ergo D E eſt æqualis E G; quod eſt abſurdum. ponebatur enim D E æqualis E F. 31. tertii huius.

THEOREMA VIII. PROPOSITIO VIII.



IISDEM poſitis, ſit punctum D in una aſymptoton; & reliqua eadem fiant. Dico lineam, quæ à tactu ad extremam partem ſumptæ ducitur; æquidiſtantem eſſe aſymptoto, in qua eſt punctum D.

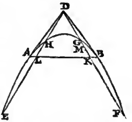
SINT enim eadem, quæ ſupra; ponaturque ipſi D E æqualis E F: & à puncto B ducatur B G æquidiſtans M N, ſi fieri poſſit. æqualis igitur eſt D E ipſi E G; quod eſt abſurdum. poſuimus enim D E ipſi E F æqualem eſſe.

THEOREMA IX. PROPOSITIO IX.

SI ab eodem puncto duæ rectæ lineæ ducantur, quarum utraque coni ſectionem, vel circuli circunferentiam in duobus punctis ſecet; & quam proportionem habent totæ lineæ ad portiones, quæ extra ſumuntur, in eam dividantur, quæ ſunt intra; ita ut partes eiuſdem rationis ad idem punctum conveniant: quæ per diviſiones ducitur, linea ſectioni in duobus punctis occurret; & quæ ab occurſu ad punctum extra ſumptum ducuntur, ſectionem contingent.

SIT aliqua prædictarum ſectionum A B; & ab aliquo puncto D ducantur lineæ D E, D F, quæ ſectionem ſecent; illa quidem in H, E punctis; hæc verò in F, G: & quam proportionem habet E D ad D H, eandem habeat E L ad L H; & rurſus quam habet F D ad D G, habeat F K ad

K G. Dico lineam, quæ ab L ad K ducitur, utraque ex parte occurrere ſectioni: & quæ ab occurſibus ducuntur ad D ſectionem contingere. Quoniam enim utraque linearum E D, D F ſectionem in duobus punctis ſecat: poterimus ab ipſo D ſectionis diametrum ducere. quare & contingentes ex utraque parte. ducantur igitur D A, D B, quæ ſectionem contingant: & iuncta B A, ſi fieri poſſit, non tranſeat per L, K; ſed vel per alterum ipſorum tantùm, vel per neutrum. tranſeat primò per L tantùm; & lineam F G in puncto M ſecet. ergo ut F D ad D G, ita F M ad M G, quod eſt abſurdum; ponitur enim ut F D ad D G, ita F K ad K G. ſi verò linea B A per neutrum punctorum K, L tranſeat; in utraque ipſarum D E, D F, id quod eſt abſurdum ſequetur.



THEOREMA X. PROPOSITIO X.

HÆC quidem communiter in omnibus; at in ſola hyperbola, ſi alia quidem eadem ſint; unius autem rectæ lineæ occurſus contineant occurſus alterius; & punctum D ſit intra angulum aſymptotis comprehenſum: eadem prorſus evenient, quæ dicta ſunt, ut in ſecundo theoremate tradidimus.

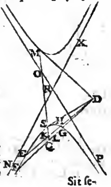
THEOREMA XI. PROPOSITIO XI.

IISDEM poſitis, ſi unius lineæ occurſus occurſus alterius non cõtineant; & punctũ D ſit intra angulum aſymptotis comprehenſũ; & figura, & demonſtratio eadem erit, quæ in tertio theoremate.

THEOREMA XII. PROPOSITIO XII.

IISDEM poſitis, ſi occurſus unius lineæ alterius occurſus contineant; & punctum ſumptum ſit in angulo deinceps ei, qui aſymptotis comprehenditur: linea per diviſiones ducta, ſi producatur, occurret oppoſitæ ſectioni; & quæ ab occurſibus ducuntur ad punctum D, oppoſitas ſectiones contingent.

SIT hyperbole E G, cuius aſymptoti N X, O P, & centrum R; punctum verò D ſit in angulo X R P; & ducantur D E, D F; quarum utraque hyperbolen in duobus punctis ſecet: & puncta E, H à punctis F, G contineantur; ſitque ut E D ad D H, ita E K ad K H; & ut F D ad D G, ita F L ad L G. Demonſtrandum eſt lineam per K, L ductam occurrere ſectioni E F, & ei, quæ ipſi opponitur: & quæ ab occurſibus ducuntur ad D, ſectiones contingere.

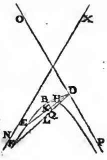


Sit ſe-

Sit ſectio oppoſita M; & à puncto D ducantur D M, D S, quæ ſectiones contingant: iunctaque M S, ſi fieri poſſit, non tranſeat per K, L; ſed vel per alterum ipſorum, vel per neutrum. Tranſeat primùm per K, & ſecet F G in Q. eſt igitur ut F D ad D G, ita F Q ad Q G, quod eſt abſurdum: ponitur enim ut F D ad D G, ita F L ad L G. ſi verò M S per neutrum punctorum K, L tranſeat; in utraque ipſarum E D, D F eveniet illud, quod fieri non poteſt.

THEOREMA XIII. PROPOSITIO XIII.

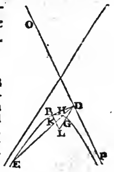
IISDEM poſitis, ſi punctum D ſit in una aſymptoton; & reliqua eadem exiſtant: quæ per diviſiones tranſit linea aſymptoto, in qua eſt punctum, æquidiſtabit; & producta occurret ſectioni; quæ verò ab occurſu ad punctum ducitur, ſectionem continget.



SIT hyperbole, & aſymptoti; ſumptoque in una aſymptoton puncto D, ducantur rectæ lineæ, & dividantur, ut dictum eſt: & ab ipſo D linea D B ſectionem contingat. Dico eam, quæ à puncto B ducitur ipſi O P æquidiſtans, per puncta K, L tranſire. Si enim non, vel per unum ipſorum tranſibit, vel per neutrùm. Tranſeat primò per K tantùm. quare ut F D ad D G, ita F Q ad Q G. quod eſt abſurdum. non igitur à puncto B ducta æquidiſtans P O per unum tantùm eorum tranſibit. ergo per utrunque tranſeat neceſſe eſt.

THEOREMA XIV. PROPOSITIO XIV.

IISDEM poſitis, ſi punctum D ſit in una aſymptoton; & linea quidem D E ſectionem in duobus punctis ſecet; D G verò alteri aſymptoto æquidiſtans ſecet in uno tantùm, quod ſit G; fiatque ut E D ad D H, ita E K ad K H; & ipſi D G ponatur æqualis G L; quæ per puncta K, L tranſit linea, & aſymptoto æquidiſtabit, & ſectioni occurret; quæ verò ab occurſu ducitur ad D, ſectionem continget.



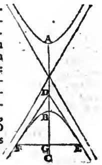
SIMILITER enim, ut in ſuperioribus, ducta linea D B contingente, dico eam, quæ à puncto B ducitur, aſymptoto P O æquidiſtans, per puncta K, L tranſire. Si enim per K ſolùm tráſeat, non erit D G ipſi G L æqualis; quod eſt abſurdum: ſi verò per L ſolùm, non erit ut E D ad D H, ita E K ad K H. quòd ſi neque per K tranſeat, neque per L, in utriſque id, quod eſt abſurdum, ſequetur. ergo per utraque puncta tranſire neceſſarium eſt.

THEO-

Digitized by Google

THEOREMA XV. PROPOSITIO XV.

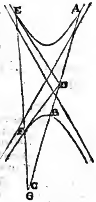
SI in ſectionibus oppoſitis inter duas ſectiones ſumatur aliquod punctum, & ab ipſo duæ lineæ ducantur; altera quidem contingens unam oppoſitarum, altera verò utranque ſecans; & quam proportionem habet linea, inter ſectionem, quam non contingit, & punctum interiecta, ad lineam, quæ eſt inter punctum & alteram ſectionem, eandem habeat linea quædam maior ea, quæ inter ſectiones interijcitur ad exceſſum ipſius in eadem recta, & ad eundem terminum cum linea eiuſdem rationis: quæ à termino maioris lineæ ad tactum ducitur, occurret ſectioni; & quæ ab occurſu ducitur ad ſumptum punctum, ſectionem continget.



SINT ſectiones oppoſitæ A, B; ſumptoque inter ſectiones aliquo puncto D, intra angulum aſymptotis contentum, ab ipſo ducatur linea quidem D F contingens ſectionem, A D B vero ſectiones ſecans: & quam proportionem habet A D ad D B, habeat A C ad C D. Demonſtrandum eſt, lineam à puncto F ad C productam occurrere ſectioni: & eam, quæ ab occurſu ducitur ad D ſectionem contingere. Quoniam enim punctum D eſt intra angulum, qui ſectionem continet:
49. ſecūdi huius. poterimus ab ipſo D aliam contingentem ducere, quæ ſit D E; & iuncta F E, ſi fieri poteſt, per C non tranſeat, ſed per aliud punctum G. erit ut A D
16. primi huius. ad D B. ita A G ad G B, quod eſt abſurdum. poſuimus enim ut A D ad D B ita eſſe A C ad C B.

THEOREMA XVI. PROPOSITIO XVI.

IISDEM poſitis, ſit punctum D in angulo deinceps ei, qui aſymptotis continetur: & reliqua eadem fiant. Dico lineam à puncto F ad C productam occurrere oppoſitæ ſectioni: & quæ ab occurſu ducitur ad D, eandem ſectionem contingere.

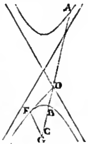


SINT enim eadem, quæ ſupra; & punctum D ſit in angulo deinceps ei, qui aſymptotis continetur; atque à puncto D ducatur D E ſectionem A contingens: iuncta autem E F, & producta, ſi fieri poteſt, non tranſeat per
39. tertii, huius. C, ſed per aliud punctum G. erit ut A G ad G B, ita A D ad D B; quod eſt abſurdum, ponebatur enim ut A D ad D B, ita A C ad C B.

THEO,

THEOREMA XVII. PROPOSITIO XVII.

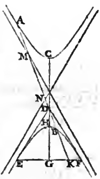
IISDEM poſitis, ſit punctum D in una aſymptoton. Dico lineam, quæ ab F ad C ducitur, aſymptoto, in qua eſt punctum, æquidiſtare.



SINT eadem, quæ ſupra; & punctum D in una aſymptoton; ductaque per F eidem aſymptoto æquidiſtans non tranſeat per C, ſi fieri poteſt, ſed per G: erit ut A D ad D B, ita A G ad G B; quod eſt abſurdum. ergo quæ à puncto F ducitur aſymptoto æquidiſtans per punctum C tranſibit. 36. tertii huius.

THEOREMA XVIII. PROPOSITIO XVIII.

SI in ſectionibus oppoſitis aliquod punctum ſumatur inter duas ſectiones; & ab ipſo duæ lineæ ducantur, utrânque ſectionem ſecantes; & quam proportionem habent interiectæ inter unam ſectionem & punctum ad eas, quæ inter idem punctum & alteram ſectionem interijciuntur, eandem habeant lineæ maiores ijs, quæ ſunt inter ſectiones oppoſitas, ad exceſſus ipſarum: quæ per terminos maiorum linearum tranſeunt, occurrent ſectionibus; & quæ ab occurſibus ad ſumptum punctum ducuntur, ſectiones contingent.

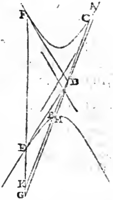


SINT oppoſitæ ſectiones A, B; & punctum D inter ſectiones; quod quidem primùm ponatur in angulo aſymptotis contento: & per D lineæ A D B, C D H ducantur. maior igitur eſt A D, quàm D B; & C D maior, quàm D H; quoniam B N eſt æqualis A M: quam verò proportionem habet A D ad D B, habeat A K ad K B; & quam C D habet ad D H, habeat C G ad G H. Dico lineam, quæ per K, G tranſit, occurrere ſectioni; & quæ à puncto D ad occurſus ducuntur, ſectionem contingere. Quoniam enim punctum D eſt in angulo aſymptotis contento: poſſumus ab eo duas lineas contingentes ducere. itaque ducantur D E, D F: & E F iungatur, quæ per puncta K, G tranſibit. Si enim non, vel tranſibit per unum ipſorum tantùm, vel per neutrum: & ſi quidem per unum tantùm, altera linearum in eandem proportionem ad aliud punctum ſecabitur; quod fieri non poteſt: ſi verò per neutrum, in utriſque id, quod fieri non poteſt, continget.

THEOREMA XIX. PROPOSITIO XIX.

SUMATUR punctum D in angulo deinceps ei, qui aſym-

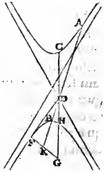
ptotis



ptotis continetur: ducanturque rectæ lineæ ſectiones ſecantes; &, ut dictum eſt, dividantur. Dico eam, quæ per K G producitur, occurrere utrique ſectionum; & quæ ab occurſibus ducuntur ad D, ſectiones contingere.

DVCANTVR enim à puncto D lineæ D E, D F, quæ utranque ſectionem contingant. ergo quæ ducitur per E F, per K, G tranſibit. ſi enim non, vel tranſibit per alterum ipſorum, vel per neutrum; & rurſus eodem modo id, quod eſt abſurdum, concludetur.

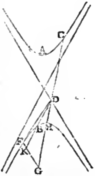
THEOREMA XX. PROPOSITIO XX.



SI ſumptum punctum ſit in una aſymptoton, & reliqua fiant: linea, quæ tranſit per terminos exceſſuum, aſymptoto, in qua eſt punctum, æquidiſtabit; & quæ à puncto ducitur ad occurſum ſectionis, & lineæ per terminos tranſeuntis, ſectionem continget.

SINT oppoſitæ ſectiones A, B: & punctum D ſit in una aſymptoton; & reliqua eadem fiant. Dico lineam, quæ per K, G tranſit, occurrere ſectioni; & quæ ab occurſu ad D ducitur, ſectionem contingere. Ducatur enim à puncto D contingens linea D F: & ab F ducatur aſymptoto æquidiſtans, in qua eſt punctum D. tranſibit igitur ea per puncta K, G: alioqui vel per alterum tantùm tranſibit, vel per neutrum; & ita ea, de quibus dictum eſt, abſurda ſequentur.

THEOREMA XXI. PROPOSITIO XXI.

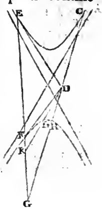


SINT rurſus oppoſitæ ſectiones A, B; ſitque punctum D in una aſymptoton: & linea quidem D B K in uno tantùm puncto occurrat ſectioni B, alteri aſymptoto æquidiſtans; linea verò C D H G utrique ſectioni occurrat: & ut C D ad D H, ita C G ad G H; & ipſi D B æqualis ſit B K. Dico lineam, quæ per puncta K, G tranſit, occurrere ſectioni; aſymptotoque, in qua eſt punctum D, æquidiſtare: & quæ ab occurſu ad punctum D ducitur, ſectionem contingere.

DVCATVR enim linea contingens D F: & ab F ducatur æquidiſtans aſymptoto, in qua eſt D. tranſibit ea per puncta K, G: alioqui eadem abſurda ſequantur neceſſe eſt.

THEOREMA XXII. PROPOSITIO XXII.

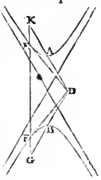
SINT ſimiliter oppoſitæ ſectiones, aſymptotique; & punctum D ſumatur in angulo deinceps ei, qui aſymptotis continetur; linea verò C D H ſecet utraſque ſectiones;& D B alteri aſymptoto æquidiſtet: ſitque ut C D ad D H, ita C G ad G H; & ipſi D B æqualis ponatur B K. Dico lineam, quæ per puncta K,G tranſit, occurrere utrique oppoſitarum ſectionum: & quæ ab occurſibus ducuntur ad D, ſectiones eaſdem contingere.



DVCANTVR enim D E, D F, quæ ſectiones contingant: & iuncta E F, ſi fieri poſſit, non tranſeat per K,G; ſed vel per alterum ipſorum tantùm, vel per neutrum. & ſiquidem per G tantùm tranſeat; linea D B non erit æqualis ipſi B K, ſed alteri, quod eſt abſurdum: ſi verò tantùm per K; non erit ut C D ad D H, ita C G ad G H, ſed alia quædam ad aliam: quòd ſi per neutrum ipſorum K,G tranſeat; utraque abſurda ſequentur.

THEOREMA XXIII. PROPOSITIO XXIII.

SINT itidem oppoſitæ ſectiones A,B; punctumque D ſit in angulo deinceps ei, qui aſymptotis continetur: & linea quidem B D ſectionem B in uno puncto tantùm ſecet, alteri aſymptoto æquidiſtans; linea verò D A ſimiliter ſecet ſectionem A; ſitque D B ipſi B G æqualis, & D A ipſi A K. Dico lineam, quæ tranſit per K, G occurrere ſectionibus: & quæ ab occurſibus ad D ducuntur, ſectiones contingere.



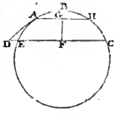
DVCANTVR enim D E, D F; quæ contingant ſectiones: & iuncta E F non tranſeat per K,G, ſi fieri poteſt; ſed vel per alterum ipſorum, vel per neutrum. ex quibus ſequitur, ut vel D A non ſit æqualis A K, ſed alij cuipiam; quod eſt abſurdum: vel D B non ſit æqualis B G: vel neutra neutræ ſit æqualis: & ita in utriſque idem continget abſurdum. linea igitur E F per puncta K, G neceſſariò tranſibit.

THEOREMA XXIV. PROPOSITIO XXIV.

CONI ſectio coni ſectioni, vel circuli circunferentiæ non occurrit; ita ut pars quidem eadem ſit, pars verò non ſit communis.

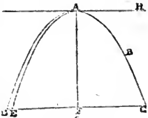
SI enim fieri poteſt; coni ſectio D A B C circuli circunferentiæ E A B C occurrat, ut ipſarum communis pars ſit eadem A B C; non communis autem A D, A E: & ſumpto in ipſis puncto H, iungatur H A, & per quodvis punctum E ducatur D E C, æquidiſtans A H; ſectaque A H bifariam in G, ducatur per G diameter B G F. ergo quæ per B ipſi A H æquidiſtans ducitur, utranque ſectionem continget; & æquidiſtabit D E C: eritque in altera quidem ſectione D F æqualis F C; in altera verò E F æqualis F C. quare & D F ipſi F E æqualis erit. quod fieri non poteſt.

32. primi huius. 30. primi elem. 46. & 47. primi huius.

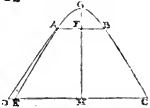


E V T O C I V S.

ALITER. Sint ſectiones D A B C, E A B C; ducaturque linea D E C, quomodocunque contingat: & per A ipſi D E C æquidiſtans ducatur A H. ſi igitur A H intra ſectiones cadit; congruet ea demonſtratio, quæ ab Apollonio affertur: ſi verò contingit in puncto A; & utraſque ſectiones continget. ergo diameter alterius ſectionis, quæ ab A ducitur, reliquæ etiam diameter erit: & propterea in puncto F ſecabit, & lineam D C, & C E. quod fieri non poteſt.



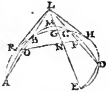
ALITER. Sint ſectiones D A B C, E A B C, ut dictum eſt; & in communi ipſarum parte A B C ſumatur punctum B: & ducta A B bifariam ſecetur in F; perque F ducatur diameter G F H; & per C linea C E D ipſi A B æquidiſtans. Quoniam igitur F H diameter eſt, quæ bifariam ſecat lineam A B: erit A B ordinatim applicata. & æquidiſtat C E D. ergo C E bifariam ſecatur in H. ſed in ſectione E A B C deſcripta eſt E C; & in ſectione D A B C, ipſa C D. linea igitur E H lineæ H D eſt æqualis. quod fieri non poteſt.



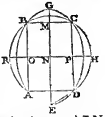
THEOREMA XXV. PROPOSITIO XXV.

CONI ſectio coni ſectionem, vel circuli circunferentiam in pluribus punctis, quàm quatuor non ſecat.

SI enim fieri poteſt; ſecet in quinque punctis A, B, C, D, E: ſintque A, B, C, D, E occurſus deinceps, nullum intermedium reliquentes; & iunctæ A B, C D producantur, quæ convenient inter ſe extra ſectionem in parabola &
1 hyperbola. Itaque conveniant in L: & quam proportionem habet A L ad L B, habeat A O ad O B; quam
3 verò D L habet ad L C, habeat D P ad P C. ergo quæ à puncto P ad O iuncta producitur ex utraque parte, occurreret ſectioni: & quæ ab occurſibus ducuntur ad L, ſectiones contingent. occurrat in punctis H, R: & H L, L R iungantur. contingent



tingent igitur hæ ſectiones; & E L utranque ſecabit: quoniam inter B C nullus eſt occurſus. Itaque ſecet in punctis M,G. ergo in altera quidem ſectione C
erit ut E L ad L G, ita E N ad N G: in altera autem ut E L ad L M, ita E N ad N M; quod fieri non poteſt. quare neque illud, quod à principio ponebatur. Si verò A B, D C æquidiſtent; ſectiones erunt ellipſis, vel circuli circunferentia. dividantur A B,C D biſariam in O,P; & iuncta P O ad utraſque partes producatur, quæ ſectionibus occurret in H,R. erit igitur H R diameter ſectionum. & A B, C D D
ad ipſam ordinatim applicabuntur. quare à puncto R ducta E N M G,ipſi A B, C D æquidiſtans, ſecabit lineam H R, & utranque ſectionem: propterea quod alius occurſus non eſt præter A,B,C,D,E. ergo ex ijs, quæ dicta ſunt, in altera quidem ſectione erit E N æqualis N M, in altera verò E N E
æqualis N G. quare N M ipſi N G eſt æqualis. quod fieri non poteſt.



FED. COMMANDINVS.

ET iunctæ A B, C D producantur, quæ convenient inter ſe extra ſectionem in parabola, & hyperbola.) *Ex vigeſima quarta & vigeſima quinta ſecundi huius.* A

Ergo quæ à puncto P ad O iuncta producitur ex utraque parte occurrit ſectioni; & quæ ab occurſibus ducuntur ad L,ſectiones contingunt.) *Ex nona huius.* B

Itaque ſecet in punctis M,G. ergo in altera quidem ſectione erit ut E L ad L G, ita E N ad N G; in altera autem ut &c.] *Sit linea L G maior, quàm L M: erit contra N M maior, quàm N G. habebit igitur E L ad L M maiorem proportionem, quàm E L ad L G. ut autem E L ad L M, ita E N ad N M: & ut E L ad L G, ita E N ad N G. ergo E N ad N M maiorem proportionem habet, quàm E N ad N G: & iccirco N M minor eſt, quàm N G. ſed & erat maior. quod fieri non poteſt.* C 8. quinti 14 quinti. 10.

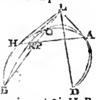
Erit igitur H R diameter ſectionum.] *Ex vigeſima octava ſecundi huius.* D

Ergo ex ijs, quæ dicta ſunt, in altera quidem ſectione erit E N æqualis N M, in altera verò E N æqualis N G.] *Sunt enim & E M, E G ad diametrum H R ordinatim applicatæ.* E

THEOREMA XXVI. PROPOSITIO XXVI.

SI dictarum linearum aliquæ in uno puncto ſeſe contingant; non occurrent ſibi ipſis ad alia puncta plura, quàm duo.

CONTINGANT enim ſeſe duæ quæpiam dictarum linearum in puncto A. Dico eas non occurrere ſibi ipſis ad alia puncta plura, quàm duo. Nam, ſi fieri poteſt, occurrant ad puncta B,C,D; ſintque occurſus deinceps, nullum intermedium relinquentes; & iuncta B C producatur: à puncto autem A ducatur contingens A L; quæ quidem continget duas ſectiones, & cum linea B C conveniet. conveniat in L; & fiat ut C L ad L B, ita C P ad P B: iungaturque A P, & producatur. occurret ea ſectionibus; & quæ ab occurſibus ad punctum L ducuntur, ſectiones contingent. Itaque occurrat in punctis H, R; 9. huius.
& iungantur H L, L R, quæ contingent ſectiones. ergo quæ à puncto D ad L ducitur utranque ſectionem ſecabit; & eadem, quæ dicta ſunt, abſurda ſequentur.

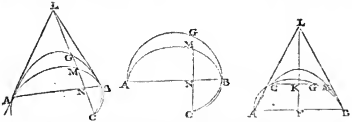


tur. non igitur ſe ſecant ad plura puncta, quàm duo. ſi verò in ellipſi, & circuli circunferentia C B ipſi A L æquidiſtet; ſimiliter demonſtrationem faciemus, lineam A H diametrum oſtendentes.

THEOREMA XXVII. PROPOSITIO XXVII.

SI prædictarum linearum aliquæ in duobus punctis ſeſe contingant; in alio puncto ſibi ipſis non occurrent.

PRÆDICTARVM enim linearum duæ ſeſe contingant in duobus punctis A,B. Dico eas ad aliud punctum ſibi ipſis non occurrere. Nam ſi fieri poteſt, occurrant etiam ad punctum C; ſitque primùm C extra A,B tactus: & ab ipſis ducantur lineæ contingentes, quæ in punctum L conueniant, ut in prima figura apparet. contingent igitur hæ utranque ſectionem: & iuncta C L utranque ſecabit. ſecet in punctis G,M; & iungatur A N B. ergo in altera quidem ſectione erit ut C L ad L G, ita C N ad N G; in altera verò ut C L ad L M, ita C N ad N M. quod eſt abſurdum.



AT ſi C G æquidiſtans ſit lineis ad puncta A,B contingentibus, ut in ellipſi in ſecunda figura; iungemus lineam A B, quæ ſectionum diameter erit. ergo utra-
27. ſecũdi huius. que linearum C G, C M in puncto N bifariam ſecabitur; quod eſt abſurdum. non igitur ſectiones ad aliud punctum ſibi ipſis occurrunt, ſed ad A B tantùm.

SIT deinde C inter tactus, ut in tertia figura: perſpicuum eſt ſectiones non contingere ſeſe ad punctum C: quoniam ad duo tantùm contingentes ponebantur. ſecent igitur ſe ipſas in C: & à punctis A,B ducantur A L, L B, quæ ſectiones
39. ſecũdi huius. contingant: iungaturque A B, & in F bifariam dividatur. ergo à puncto L ad F ducta diameter erit, quæ quidem per C non tranſibit. ſi enim tranſeat; quæ per C ipſi A B æquidiſtans ducitur, continget utranque ſectionem; quod fieri non poteſt. itaque ducatur à puncto C linea C K G M æquidiſtans A B. erit in altera quidem ſectione C K æqualis K G: in altera verò C K æqualis K M. quare K M ipſi K G eſt æqualis; quod fieri non poteſt. Eodem modo ſi contingentes inter ſe æquidiſtent, ex ijs, quæ diximus, illud, quod fieri non poteſt, concludetur.

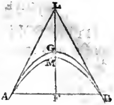
THEOREMA XXVIII. PROPOSITIO XXVIII.

PARABOLE parabolen non contingit, præterquàm in uno puncto.

SI enim fieri poteſt; parabolæ A G B, A M B in punctis A, B ſeſe contingant: & ducantur lineæ contingentes A L, L B. contingent hæ utraſ-

que

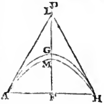
que ſectiones; & in punctum L convenient. itaque iuncta A B ſecetur bifariam in F; & ducatur L F. Quoniam igitur duæ lineæ A G B, A M B ſeſe contingunt in punctis A, B: ad aliud punctum ſibi ipſis non occurrent. quare L F utranque ſectionem ſecabit. ſecet in G, M. ergo in altera quidem ſectione erit L G æqualis G F, in altera verò L M æqualis M F. quod fieri non poteſt. non igitur parabole parabolen præterquàm in uno puncto contingit. ex præcedente. 35 primi huius.



THEOREMA XXIX. PROPOSITIO XXIX.

PARABOLE hyperbolen non contingit in duobus punctis extra ipſam cadens.

SIT parabole quidem A G B, hyperbole verò A M B; & ſi fieri poteſt, ſeſe contingant in punctis A, B: & ab ipſis ducantur lineæ utranque ſectionem contingentes, quæ in L conveniant: iunctaque A B bifariam ſecetur in F; & L F ducatur. Itaque quoniam ſectiones A G B, A M B ſeſe contingunt in punctis A, B: ad aliud punctum ſibi ipſis non occurrent. quare L F in alio atque alio puncto ſectiones ſecat. ſecet in G, M; & producatur L F, quæ in centrum hyperbolæ cadet; ſitque centrum D. ergo propter hyperbolen ut F D ad D M, ita erit M D ad D L; & ita reliqua F M ad M L. eſt autem F D maior, quàm D M. ergo & F M maior, quàm M L. ſed propter parabolen erit F G æqualis G L. quod fieri non poteſt. 27.huius. 29.ſecũdi huius. A 19.quinti 14. 35. primi huius. B



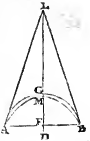
FED. COMMANDINVS.

ERGO propter hyperbolen ut F D ad D M ita M D ad D L.] *Eſt enim ex trigeſima ſeptima primi huius rectangulum F D L quadrato D M æquale. ergo ut F D ad D M, ita M D ad D L; & ita reliqua F M ad M L.* A 14. ſexti. 19.quinti

Quod fieri non poteſt.) *Eſſet enim G F minor, quàm F M.* B

THEOREMA XXX. PROPOSITIO XXX.

PARABOLE ellipſim, vel circuli circunferentiam non contingit in duobus punctis intra ipſam cadens.

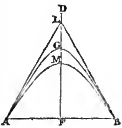


SIT ellipſis, vel circuli circunferentia A G B, parabole verò A M B; & ſi fieri poteſt, in duobus punctis A, B ſeſe contingant: & ab ipſis ducantur lineæ contingentes ſectiones, quæ conveniant in punctum L; iunctaque A B ſecetur in F bifariam; & ducatur L F. ſecabit igitur L F utranque ſectionem in alio atque alio puncto, uti dictum eſt. ſecet in G, M: & producatur L F uſque ad D, quod ſit centrum ellipſis, vel circuli. ergo propter ellipſim & circulum erit ut L D ad D G, ita G D ad D F; & reliqua L G ad G F. eſtque L D maior, quàm D G. ergo & L G maior, quàm G F. ſed propter parabolen erit L M æqualis M F. quod fieri non poteſt. 37. primi huius. 14ſexti.

THEO-

THEOREMA XXXI. PROPOSITIO XXXI.

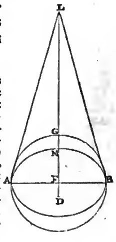
HYPERBOLE hyperbolen idem centrum habens in duobus punctis non continget.



HYPERBOLÆ enim A G B, A M B idem habentes centrum D, ſi fieri poteſt, in punctis A,B ſeſe contingant; & ducantur ab ipſis lineæ contingentes, quæ inter ſe conveniant,A L, L B: iunctaque D L
30.ſecũdi huius. producatur; & iungatur A B. ergo D F ſecat bifariam lineam A B in F. & utraſque ſectiones in
37. primi huius. G, M ſecat. quare propter hyperbolen A G B rectangulum F D L eſt æquale quadrato D G: & propter hyperbolen A M B rectangulum F D L æquale eſt quadrato D M. quadratum igitur M D quadrato D G æquale erit. quod fieri non poteſt.

THEOREMA XXXII. PROPOSITIO XXXII.

SI ellipſis ellipſim, vel circuli circunferentiam, idem centrum habens in duobus punctis contingat: linea coniungens tactus per centrum tranſibit,



CONTINGANT enim ſeſe dictæ lineæ in punctis A,B; & iuncta A B, per A,B puncta ducantur lineæ ſectiones contingentes, quæ ſi fieri poſſit, conveniant in L: & linea A B in F bifariam dividatur; & iun-
29.ſecũdi huius. gatur L F. ergo L F diameter eſt ſectionum. Sit centrum D, ſi fieri poteſt. rectangulum igitur D L F pro-
37. primi huius. pter alteram quidem ſectionem eſt æquale quadrato D G; propter alteram verò æquale quadrato D M. quare G D quadratum quadrato D M æquale erit: quod fieri non poteſt. non igitur lineæ contingentes à punctis A, B ductæ conveniunt. ergo æquidiſtant inter ſeſe: & icciręo linea A B diameter eſt, quæ per centrum tranſibit. id quod demonſtrandum proponebatur.

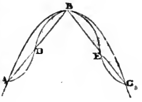
THEOREMA XXXIII. PROPOSITIO XXXIII.

CONI ſectio vel circuli circunferentia coni ſectioni vel circuli circunferentiæ, quæ non ad eaſdem partes convexa habeat, ad plura puncta quàm duo non occurret.

SI enim fieri poteſt, coni ſectio vel circuli circunferentia A B C coni ſectioni vel circuli circunferentiæ A D B E C occurrat ad plura puncta, quàm

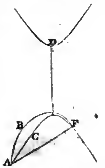
Digitized by Google

quàm duo, non habens convexa A B C ad eaſdem partes. Quoniam igitur in linea A B C ſumuntur tria puncta A, B, C; & A B, B C iunguntur: continent angulum ad eaſdem partes, in quibus ſunt concava lineæ A B C. & ſimili ratione lineæ A B, B C eundem angulum continent ad eas partes, in quibus ſunt concava lineæ A D B E C. ergo dictæ lineæ ad eaſdem partes habent concava & convexa. quod fieri non poteſt.



THEOREMA XXXIV. PROPOSITIO XXXIV.

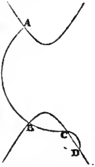
SI coni ſectio, vel circuli circunferentia occurrat uni oppoſitarum ſectionum in duobus punctis; & lineæ, quæ inter occurſus interijciuntur, ad eaſdem partes concava habeant: producta linea ad occurſus alteri oppoſitarum ſectionum non occurret.



SINT oppoſitæ ſectiones D, A C F; & coni ſectio, vel circuli circunferentia A B F occurrat alteri oppoſitarum ſectionum in duobus punctis A, F: habeantque A B F, A C F concava ad eaſdem partes. Dico lineam A B F productam ſectioni D non occurrere. Iungatur enim A F. Et quoniam D, A C F oppoſitæ ſectiones ſunt; & recta linea A F in duobus punctis hyperbolen ſecat: producta non occurret oppoſitæ ſectioni D. quare neque linea A B F eidem occurret. 33. ſecũdi huius.

THEOREMA XXXV. PROPOSITIO XXXV.

SI coni ſectio, vel circuli circunferentia uni oppoſitarum ſectionum occurrat; reliquæ ipſarum non occurret ad plura puncta, quàm duo.



SINT oppoſitæ ſectiones A, B: & ipſi A occurrat coni ſectio, vel circuli circunferentia A B C; ſecetque B in punctis B, C. Dico ad aliud punctum ipſi B non occurrere. Si enim fieri poſſit; occurrat in D. ergo linea B C D ſectioni B C occurrit ad plura puncta, quàm duo, non habens concava ad eaſdem partes. quod fieri non poteſt. 33. huius. ſimiliter demonſtrabitur & ſi linea A B C oppoſitam ſectionem contingat.

THEOREMA XXXVI. PROPOSITIO XXXVI.

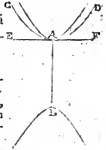
CONI ſectio, vel circuli circunferentia oppoſitis ſectionibus ad plura puncta quàm quatuor non occurret.

HOC

Digitized by Google

ex antecedente. HOC autem perſpicuè conſtat: nam linea, occurrens uni oppoſitarum ſectionum, reliquæ non occurrit ad plura puncta, quàm duo.

THEOREMA XXXVII. PROPOSITIO XXXVII.



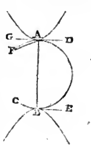
SI coni ſectio, vel circuli circunferentia unā oppoſitarum ſectionum concava ſui parte contingat; alteri oppoſitarum non occurret.

SINT oppoſitæ ſectiones A, B: & ſectionem A contingat linea C A D. Dico C A D ſectioni B non occurrere. Ducatur enim per A punctum linea contingens E A F, quæ utranque linearum continget in A. quare non occurret ſectioni B: & propterea neque linea C A D eidem occurret.

THEOREMA XXXVIII. PROPOSITIO XXXVIII.

SI coni ſectio, vel circuli circunferentia utranque oppoſitarum ſectionum contingat in uno puncto; oppoſitis ſectionibus in alio puncto non occurret.

SINT oppoſitæ ſectiones A,B: coni autem ſectio, vel circuli circunferentia A B C utranque ipſarum in punctis A,B contingat. Dico lineam A B C oppoſitis ſectionibus A,B in alio puncto non A occurrere. Quoniam enim A B C ſectionem A in uno puncto contingit, ſectioni B occurrens: non continget ſectionem A concava ſui parte. ſimiliter demonſtrabitur neque ita contingere ſectionem B. Ducantur lineæ A D, B E contingentes ſectiones A,B; quæ & lineam A B C contingent: B ſi enim fieri poteſt, altera ipſarum ſecet; ſitque A F. ergo inter lineam A F contingentem, & inter ſectionem A cadit linea intermedia G. quod eſt abſurdum. lineæ igitur A D, B E ipſam quoque A B C contingent. ex quo apparet lineam A B C ad aliud punctum oppoſitis ſectionibus non occurrere.



FED. COMMANDINVS.

A QVONIAM enim A B C ſectionem A in uno puncto contingit, ſectioni B occurrens: non continget ſectionem A concava ſui parte.) *Si enim fieri poteſt; contingat ſectionem A concava ſui parte. ergo ex antecedente, alteri oppoſitarum ſectionum non occurret. ſed & occurrit ſectioni B, quod eſt abſurdum.*

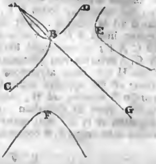
B Ergo inter lineam A F contingentem, & inter ſectionem A cadit linea intermedia G. quod eſt abſurdum.] *Ex demonſtratis in trigeſima ſexta primi huius. In Græcis autem condicibus ante hæc verba, non nulla alia legebantur, quæ nos tanquam ſuperflua omiſimus.*

THEOREMA XXXIX. PROPOSITIO XXXIX.

SI hyperbole uni oppoſitarum ſectionum in duobus punctis occur-

Digitized by Google

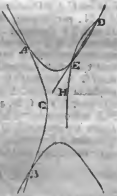
occurrat, convexa habens è regione ſita; quæ ipſi opponitur ſectio, alteri oppoſitarum non occurret.



SINT oppoſitæ ſectiones A B D, F; & hyperbole A B C ſectioni A B D occurrat in punctis A, B, habens convexa è regione ſita: ſitque ſectioni A B C oppoſita ſectio E. Dico ipſam E ſectioni F non occurrere. Iungatur enim A B, & ad G producatur. Quoniam igitur A B G recta linea ſecat hyperbolen A B D; producta ex utraque parte extra ſectionem cadet. quare non occurret ſectioni F. ſimiliter propter hyperbolen A B C, neque occurret oppoſitæ ſectioni E. ergo ſectio E ſectioni F non occurret. 33. ſecũdi huius.

THEOREMA XL. PROPOSITIO XL.

SI hyperbole occurrat utrique oppoſitarum ſectionum; quæ ipſi opponitur ſectio, nulli oppoſitarum in duobus punctis occurret.



SINT oppoſitæ ſectiones A, B: & A C B hyperbole utrique occurrat. Dico ſectionem, quæ ipſi A C B opponitur, ſectionibus A, B non occurrere in duobus punctis. Si enim fieri poteſt; occurrat in punctis D, E: & iuncta D E producatur. ergo propter ſectionem D E recta linea D E ſectioni A B non occurret: & propter ſectionem A E D, non occurret ipſi B: per tres enim locos tranſibit; quod fieri non poteſt. ſimiliter demonſtrabitur neque ſectioni B in duobus punctis occurrere. Eadem etiam ratione utranque ipſarum non continget. Ducatur enim linea contingens H E, quæ continget utranque ſectionem. ergo propter ſectionem D E ipſi A C non occurret: & propter ſectionem A E non occurret ſectioni B, quare neque A C ſectio ſectioni B occurret, quod non ponitur. 33. ſecũd huius. 33. ſecũdi huius.

THEOREMA XLI. PROPOSITIO XLI.

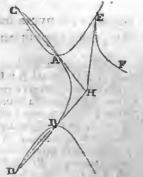
SI hyperbole utranque oppoſitarum ſectionum in duobus punctis ſecet, convexa habens è regione utrique ſita; quæ ipſi opponitur ſectio, nulli poſitarum occurret.

SINT oppoſitæ ſectiones A, B: & hyperbole C A B D utranque ſecet in duobus punctis, convexa habens è regione utriſque ſita. Dico ſectionem oppoſitam E F nulli ipſarum A, B occurrere. Si enim fieri poteſt; occurrat ſectioni A in puncto E: & iunctæ C A, D B producantur, convenient hæ

 inter

25.ſecūdi huius. inter ſeſe. Itaque conueniant in H. erit igitur H in angulo aſymptotis ſectionis C A B D contento, cui opponitur ſectio E F. ergo quæ à puncto E ad H ducitur, cadit intra angulum contentum lineis A H B. rurſus quoniam hyperbole eſt C A E; occurruntque ſibi ipſis C A H, H E; & C, A occurſus non continent occurſum E: punctum H erit inter aſymptotos ſectionis C A E. atque eſt ipſi oppoſita ſectio B D. ergo quæ à puncto B ducitur ad H, intra angulum C H E cadit, quod eſt abſurdum: cadebat enim intra angulum A H B. non igitur E F alicui oppoſitarum ſectionum A, B occurret.

A (margin)



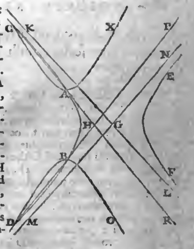
EVTOCIVS.

ALITER. Sint oppoſitæ ſectiones A,B: & hyperbole C A B D utranque ipſarum in punctis C,A,B,D ſecet;& ſit ſectio ipſi oppoſita E F. Dico E F nulli oppſitarum ſectionum occurrere. Iunctæ enim D B, C A producātur: & conueniant inter ſe in puncto H. erit igitur H inter aſymptotos ſectionis C A B D. ſint C A B D ſectionis aſymptoti K G L, M G N. perſpicuum eſt lineas N G L ſectionem E F continere. at linea C A H ſectionem C A X in duobus punctis C, A ſecat. ergo producta ex utraque parte non occurret oppoſitæ ſectioni D B O: ſed erit inter B O & lineam G L. ſimiliter & D B H producta ſectioni C A X non occurret: ſed erit inter A X & G N. quoniam igitur P H, H R non occurrentes ſectionibus A, B continent aſymptotos N G L, & multò magis ſectionem E F: ſequitur, ut E F nulli oppoſitarum ſectionum occurrat.

25.ſecūdi huius. (margin)

33.ſecūdi huius. (margin)

B (margin)



FED. COMMANDINVS.

A RVRSVS quoniam hyperbole eſt C A E; occurruntque ſibi ipſis C A H, H E; & C, A occurſus non continent occurſum E: punctum H erit inter aſymptotos ſectionis C A E.] *Vereor, ne locus corruptus ſit: neque enim punctum H neceſſariò cadere videtur inter aſymptotos ſectionis C A E; niſi linea E H ſectionem C A E, vel contingat, vel in duobus punctis ſecet; quod non ponitur. Præterea quomodo ex his abſurdum ſequatur, non facilè apparet: ſed tamen poſſumus demonſtrationem abſoluere in hunc modum.*

25.ſecūdi huius. (margin)

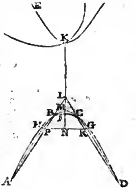
Rurſus quoniam recta linea D B H ſectionem D B O ſecat in duobus punctis: producta non occurret oppoſitæ ſectioni C A E. quare ſi à puncto E eiuſdem ſectionis linea ducatur E H; cadet extra ipſam H B, hoc eſt extra angulum A H B. quod eſt abſurdum; cadebat enim intra, non igitur E F ulli oppoſitarum ſectionum A, B occurret.

IN ALIAM DEMONSTRATIONEM, QVAM AFFERT EVTOCIVS.

SED erit inter B O & lineam G L.] *Recta enim linea C A H R, quæ hyperbolen* B
C A B D in duobus punctis ſecat, ſi producatur; aſymptoto K G L occurret ad partes K, ex octava ſecundi huius. quare ei non occurret in alio puncto; & inter ſectionem B O, & aſymptoton G L cadet. Eadem quoque ratione recta linea D B H P inter A X ſectionem, & aſymptoton G N cadat neceſſe eſt.

THEOREMA XLII. PROPOSITIO XLII.

SI hyperbole unam oppoſitarum ſectionum in quatuor punctis ſecet; quæ ipſi opponitur ſectio, non occurret alteri oppoſitarum.



SINT oppoſitæ ſectiones A B C D, E; & hyperbole ipſam A B C D ſecet in quatuor punctis A, B, C, D: ſitque ei oppoſita ſectio K. Dico K ſectioni E non occurrere. Si enim fieri poteſt; occurrat in K: & iunctæ A B, C D producantur,
quæ inter ſe convenient. conveniant in L: & quam A
proportionem habet A L ad L B, habeat A P ad P B; quam verò habet D L ad L C, habeat D R ad R C. ergo linea, quæ per P R producitur, utrique ſectioni occurret: & quæ ab L ad occurſus ducuntur, ſectio- B
nem contingent. iungatur K L, & producatur. ſecabit ea angulum B L C, & ſectiones in alio atque alio
puncto. Itaque ſecet in F, M. ergo propter op- C
poſitas ſectiones A H F G D, K, erit ut N K ad K L, ita N F ad F L: & propter ſectiones A B C D, E, ut N K ad K L, ita erit N M ad M L. quod fieri non poteſt. non igitur ſectiones E, K ſibi ipſis occurrunt.

FED. COMMANDINVS.

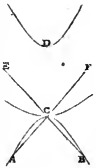
QVÆ inter ſe convenient.) *Ex vigeſima quinta ſecundi huius.* A
Ergo linea, quæ per P R producitur, utrique ſectioni occurret; & quæ ab B
L ad occurſus ducuntur, ſectionem contingent.] *Ex nona huius.*
Ergo propter oppoſitas ſectiones A H F G D, K, erit ut N K ad K L, ita N F C
ad F L.) *Eſt enim per trigeſimã ſextam primi huius ut K N ad N F, ita K L ad L F, quare & permutando ut N K ad K L, ita N F ad F L.*

THEOREMA XLIII. PROPOSITIO XLIII.

SI hyperbole alteri oppoſitarum ſectionum in duobus punctis occurrat, concava habens ad eaſdem partes; alteri verò occurrat in uno puncto: quæ ipſi opponitur ſectio nulli oppoſitarum occurret.

SINT oppoſitæ ſectiones A B, C; & hyperbole A C B ſectioni quidem

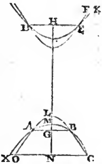
 A B in



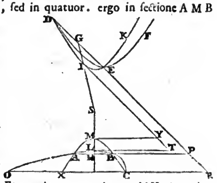
A B in punctis A, B occurrat; ſectioni verò C occurrat in uno puncto C: ſitque ipſi A C B oppoſita ſectio D. Dico D nulli ſectionum A B, C occurrere. Iungantur enim A C, B C; & producantur. Lineæ igitur A C, B C
31 ſecūdi huius. ſectioni D non occurrent. ſed neque occurrent ſectioni C præterquam in uno puncto C: ſi enim in alio puncto; oppoſitæ ſectioni A B non occurrent. poſitum autem eſt A C, B C occurrere ſectioni A B. quare ſequitur, ut A C, B C ſectioni C in uno puncto C occurrant; ſectioni verò D nullo modo. ergo D erit ſub angulo E C F: & propterea ſectionibus A B, C minimè occurret.

THEOREMA XLIV. PROPOSITIO XLIV.

SI hyperbole uni oppoſitarum ſectionum occurrat in tribus punctis; quæ ipſi opponitur, alteri oppoſitarum præterquam in uno puncto non occurret.



SINT oppoſitæ ſectiones A B C, D E F; & hyperbole A M B C occurrat A B C ſectioni in tribus punctis A, B, C: ſit autem ſectioni A M B C oppoſita ſectio D E K, & ipſi A B C oppoſita D E F. Dico D E K non occurrere ſectioni D E F præterquam in uno puncto. Si enim fieri poteſt; in punctis D, E occurrat: & iungantur A B, D E; quæ vel æquidiſtantes ſunt inter ſe, vel non æquidiſtantes. Sint primùm æquidiſtantes: ſecenturque A B, D E bifariam in punctis G, H; & iungatur G H. eſt igitur G H
36. ſecūdi huius. diameter omnium ſectionum: atque ad eam applicantur ordinatim A B, D E, ducatur à puncto C linea C N O X æquidiſtans A B: erit & ipſa ad diametrum ordinatim applicata; & ſectionibus in alio atque alio puncto occurret. Si enim in eodem puncto; non occurrerent ſectiones ſibi ipſis in tribus punctis, ſed in quatuor. ergo in ſectione A M B erit C N ipſi N X æqualis. & in A L B ſectione C N æqualis N O. quare O N eſt æqualis N X: quod fieri non poteſt. Sed non ſint æquidiſtantes A B, D E; producanturque & conveniant in P; & ducatur C O ipſi A P æquidiſtans; quæ cum D P producta conveniat in R: ſecentur autem A B, D E bifariam in punctis G, H; & per G, H ducantur diametri G I S, H L M S; atque à punctis I, L, M lineæ I Y T, M Y,
5. ſecundi huius. L T ſectiones contingant. erit igitur I T æquidiſtans D P: & L T,
19. tertii huius. M Y æquidiſtantes ipſis A P, O R. Et quoniam ut quadratum M Y ad quadratum

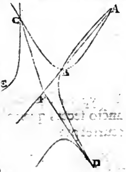


tum Y I, ita rectangulum A P B ad rectangulum D P E: erit ut quadratum M Y ad quadratum Y I, ita quadratum L T ad quadratum T I. eadem ratione, ut quadratum M Y ad quadratum Y I, ita erit rectangulum X R C ad rectangulum D R E. ſed ut quadratum L T ad quadratum T I, ita O R C rectangulum ad rectangulum D R E. ergo rectangulum O R C rectangulo X R E eſt æquale. quod fieri non poteſt.

THEOREMA XLV. PROPOSITIO XLV.

SI hyperbole unam oppoſitarum ſectionum contingat, alteram verò ſecet in duobus punctis; quæ ipſi opponitur ſectio, nulli oppoſitarum occurret.

SINT oppoſitæ ſectiones A B C, D; & hyperbole A B D ſectionem quidem A B C in punctis A,B ſecet; ſectionem verò D contingat in D: & ſit hyperbolæ A B D oppoſita ſectio C E. Dico C E nulli ipſarum A B C, D occurrere. Si enim fieri poteſt; occurrat ipſi A B C in C pũcto: iungaturque A B, & per D ducatur contingens, quæ cum linea A B conveniat in F. Punctum igitur F erit intra aſymptotos A B D ſectionis. eſt autem ipſi oppoſita ſectio C E. ergo quæ à puncto C ad F ducitur, cadit intra angulum lineis B F D contentum. rurſus quoniam hyperbole eſt A B C, cui occurrunt lineæ A B, C F; & A,B occurſus occurſum C non continent: erit punctum F intra aſymptotos ſectionis A B C. opponitur autem ipſi ſectio D. quæ igitur à C ad F ducta fuerit, intra angulum A F C cadet: quod eſt abſurdum; cadebat enim & intra angulum B F D. quare C E nulli oppoſitarum ſectionum A B C, D occurret.



A

FED. COMMANDINVS.

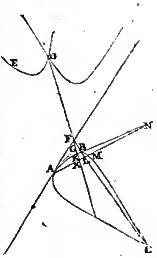
RVRSVS quoniam hyperbole eſt A B C, cui occurrunt lineæ A B, C F; & A,B occurſus occurſum C non continent: erit punctum F intra aſymptotos ſectionis A B C.] *Hoc non neceſſariò ſequi videtur, niſi linea C F ſectionem A B C vel contingat, vel in duobus punctis ſecet, quod non ponitur, ut etiam ſuperius diximus in commentarijs in 41. huius. poteſt tamen ſimiliter demonſtratio perfici hoc modo.* A

Rurſus quoniam recta linea D F ſectionem D contingit: ſi producatur; non occurret oppoſitæ ſectioni A B C. ergo à puncto C eiuſdem ſectionis ducta linea ad F, cadet extra ipſam F D, hoc eſt extra angulum B F D: quod eſt abſurdum. cadebat enim intra. quare C E nulli oppoſitarum ſectionum A B C, D occurret.

THEOREMA XLVI. PROPOSITIO XLVI.

SI hyperbole unam oppoſitarum ſectionum in uno puncto contingat; & ſecet in duobus punctis; quæ ipſi opponitur ſectio, alteri oppoſitarum non occurret.

SINT

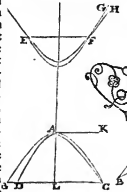


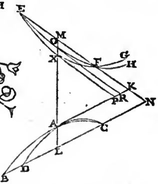
SINT oppoſitæ ſectiones A B C, D: & hyperbole A G C ſectionem A B C contingat quidem in puncto A; ſecet verò in B, C: & ipſi A G C oppoſita ſit ſectio E. Dico E ſectioni D non occurrere. Si enim fieri poteſt; occurrat in D: iunctaque B C producatur ad F; & à puncto A ducatur linea A F contingens. Similiter demonſtrabitur punctum F eſſe intra angulum aſymptotis contentum: & linea A F utraſque ſectiones continget; & D F producta ſecabit ſectiones inter A B, videlicet in punctis G, K: quã verò proportionem habet C F ad F B, habeat C L ad L B; & iuncta A L producatur, quæ
3. huius. ſectiones in alio atque alio puncto ſecabit. ſecet in M, N. ergo quæ à puncto F ad M, N ducun-
36. primi huius. & Permutãdo. tur ſectiones contingent: & ſimiliter iis, quæ, dicta ſunt, propter alteram quidem ſectionem ut X D ad D F, ita erit X G ad G F; propter alteram verò ut X D ad D F, ita X K ad K F. quod fieri non poteſt. non igitur ſectio alteri oppoſitarum occurret.

THEOREMA XLVII. PROPOSITIO LXVII.

SI hyperbole, unam oppoſitarum ſectionum contingens, in alio puncto ſecet; quæ ipſi opponitur ſectio, alteri oppoſitarum non occurret præterquam in uno puncto.

SINT oppoſitæ ſectiones A B C, E F G: & hyperbole quædam D A C contingat A B C in A, & in C ſecet; opponaturque ipſi D A C ſectio E F H. Dico eam alteri oppoſitarum non occurrere præterquam in uno puncto. Si enim fieri poteſt; occurrat in duobus punctis E, F: iungaturque E F; & per A ducatur ſectiones contingens A K. vel igitur A K, E F æquidiſtantes ſunt inter ſe, vel non. Sint primùm æquidiſtantes: & ducatur diameter bifariã ſecans ipſam A F, quæ per A tranſibit; atque erit diameter duarum coniugatarum. ducatur etiam per C linea C L D B æquidiſtans ipſis A K, E F. ſecabit igitur eas ſectiones in alio atque alio puncto: & in altera quidem erit C L æqualis L D; in altera verò C L æqualis L B. quod fieri non poteſt. Sed non ſint æquidiſtantes





A K,

A K, E F; & conueniant in K: linea verò C D, ipſi A K æquidiſtans ducta, conueniat cum E F in N; & diameter A M, bifariam diuidens E F, ſectiones in pun-
ctis X, O ſecet; atque ab X, O ducantur X P, O R ſectiones contingentes. erit igi- B
tur ut quadratum A P ad quadratum P X, ita quadratum A R ad quadratum C
R O: & propterea ut rectangulum D N C ad rectangulum E N F, ita rectan-
gulum B N C ad rectangulum E N F. ergo rectangulum D N C rectangulo D
B N C eſt æquale. quod fieri non poteſt.

FED. COMMANDINVS.

ET ducatur diameter bifariam ſecans ipſam E F, quæ per A tranſibit.] *Si* A
enim fieri poteſt; diameter à medio lineæ E F ducta non tranſeat per A, ſed per aliud punctum: & ducatur linea à puncto A ad medium E F. erit & ea diameter ex 34. ſecundi huius. quare duæ diametri inter ſe extra centrũ conuenient, quod eſt abſurdum.

Erit igitur ut quadratum A P ad quadratum P X, ita quadratum A R ad B
quadratum R O.) *Ob ſimilitudinem triangulorum A P X, A R O.*

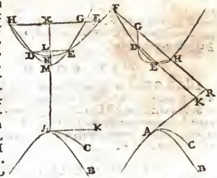
Et propterea ut rectangulum D N C ad rectangulum E N F, ita rectangulum C
B N C ad rectangulum E N F.) *Eſt enim ex 19. tertij huius, ut quadratum A P ad quadratum P X, ita rectangulum D N C ad rectangulum E N F, & ita rectangulum B N C ad idem E N F.*

Ergo rectangulum D N C rectangulo B N C eſt æquale.) *Ex nona quinti Elementorum.* D

THEOREMA XLVIII. PROPOSITIO XLVIII.

SI hyperbole unam oppoſitarum ſectionum in uno puncto contingat; quæ ipſi opponitur ſectio, alteri oppoſitarum non occurret ad plura puncta, quàm duo.

SINT oppoſitæ ſectiones A B, D E G: & hyperbole A C ſectionem A B in puncto A cõtingat; ſitque ipſi A C oppoſita ſectio D E F. Dico D E F non occurrere ſectioni D E G ad plura puncta, quàm duo. Si enim fieri poteſt; occurrat ad puncta tria D, E, H: & ducatur recta linea A K, ſectiones A B, A C contingens; iuncta verò D E producatur: & ſint primùm A K, D E inter ſe æquidiſtantes; ſeceturque D E bifariam in L; & iungatur A L. erit igitur A L diameter duarum coniugatarum, quæ ſectiones inter puncta D, E ſecat in M, N; quoniam D L E in puncto L bifariam ſecta eſt. ducatur ab H linea H X G F æquidiſtans D E. ergo in altera quidem ſectione



34. ſecũdi huius.

erit H X æqualis X F; in altera verò H X æqualis X G. quare X F ipſi X G eſt æqualis: quod fieri non poteſt. Sed non ſint A K, D E æquidiſtantes; conueniantque in K; & reliqua eadem fiant: producta verò A K occurrat ipſi F H in R. ſimiliter atque in iis, quæ dicta ſunt, demonſtrabimus, ut rectangulum

D K E

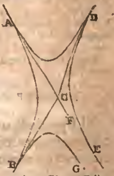
DKE ad quadratum AK in ſectione FDE, ita eſſe rectangulum FRH ad quadratum RA: & in ſectione GDE, ita rectangulum GRH ad quadratum RA. rectangulum igitur GRH æquale eſt rectangulo FRH. quod fieri non poteſt. ergo DEF ipſi DEG ad plura puncta quam duo non occurret.

FED. COMMANDINVS.

INTELLIGATVR hyperbole, quæ unam oppoſitarum ſectionum contingit, vel ad eaſdem partes concava habens; alioquin hæc vera non eſſent, quod ex 52. huius manifeſtò apparere poteſt.

THEOREMA XLIX. PROPOSITIO XLIX.

SI hyperbole contingat utranque oppoſitarum ſectionum; quæ ipſi opponitur ſectio, nulli oppoſitarum occurret.



A SINT oppoſitæ ſectiones A,B: & hyperbole AB utranque ipſarum in punctis A,B contingat; opponaturque ei ſectio E. Dico E nulli ſectionum A,B occurrere. Si enim fieri poteſt; occurrat ſectioni A in D: & à punctis A,B ducantur lineæ contingentes ſectiones, quæ quidem intra aſymptotos ſectionis AB conuenient, conveniant in C: & iungatur CD. ergo CD eſt in lo-
B co intermedio inter AC, CB. ſed eſt etiam inter BC,
C CF; quod fieri non poteſt. non igitur ſectionibus A,B oppoſitis occurret.

EVTOCIVS.

A DICO E nulli ſectionum A,B occurrere.] *Ducantur enim à punctis A,B lineæ contingentes ſectiones, quæ conveniant inter ſe in puncto C, videlicet intra angulum ſectionem AB continentem. Itaque conſtat lineas AC, BC, ſi producantur, aſymptotis ſectionis E non occurrere, ſed ipſas continere, & multò magis continere ſectionem E. Quoniam igitur AC ſectionem AD contingit, non occurret ipſi BG. ſimiliter oſtendemus lineam BC ſectioni AD non occurrere, ergo ſectio E nulli ipſarum AD, BG ſectionum occurret.*

25. ſecũdi huius. ex demõſtratis in 33. ſecũdi huius. 33.

FED. COMMANDINVS.

B ERGO CD eſt in loco intermedio inter AC, CB.] *Hoc eſt à puncto D ſectionis ED ducta linea ad C intra angulum ACB cadet.*

C Sed eſt etiam inter BC, CF.) *Quoniam enim linea BC ſectionem B contingit; producta non occurret oppoſitæ ſectioni AD. quare ſi à puncto D eiuſdem ſectionis linea ducatur ad C; intra angulum BCF cadet: quod eſt abſurdum. cadebat enim intra angulum ACB.*

THEOREMA L. PROPOSITIO L.

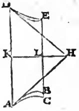
SI utraque oppoſitarum ſectionum in uno puncto contingat, ad eaſdem partes concava habens; in alio puncto non occurret.

CON-

CONTINGANT enim ſeſe oppoſitæ ſectiones in punctis A,D. Dico eas in alio puncto ſibi ipſis non occurrere. Si enim fieri poteſt; occurrant in E. & quoniam hyperbole unam oppoſitarum ſectionum in D contingens, ſecat in E: ſectio A B ipſi A C præterquam in uno puncto non occurret. ducantur à punctis A,D lineæ A H, H D; quæ ſectiones contingant: iunctaque A D, per E ducatur E B C ipſi A D æquidiſtans; & per H ducatur ſecunda diameter oppoſitarum ſectionum H L K, quæ ſecabit A D biſariam in K. ergo utraque E B, E C in puncto L biſariam ſecabitur: & propterea B L æqualis erit L C; quod fieri non poteſt. non igitur in alio puncto ſibi ipſis occurrent.

47. huius

39. ſecũdi huius.

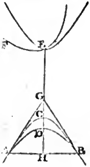


THEOREMA LI. PROPOSITIO LI.

SI hyperbole unam oppoſitarum ſectionum contingat in duobus punctis; quæ ipſi opponitur ſectio, alteri oppoſitarum non occurret.

SINT oppoſitæ ſectiones A D B, E: & hyperbole A C ſectionem A D B in duobus punctis A,B contingat: opponaturque ipſi A C ſectio F. Dico F ipſi E non occurrere. Si enim fieri poteſt; occurrat in E: & à punctis A, B ducantur contingentes ſectiones A G, G B; iungaturque A B & E G; ac producatur. ſecabit igitur ſectiones in alio atque alio puncto: & ſit E G C D H. Itaque quoniam A G, G B ſectiones contingunt; & A B coniungit tactus: erit in altera quidem coniugatione, ut H E ad E G, ita H D ad D G; in altera verò ut H E ad E G, ita H C ad C G; quod fieri non poteſt. non igitur ſectio F ipſi E occurret.

36. primi huius.

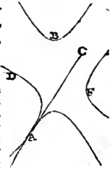


THEOREMA LII. PROPOSITIO LII.

SI hyperbole unam oppoſitarum ſectionum contingat, convexa habens è regione ſita; quæ ipſi opponitur ſectio, alteri oppoſitarum non occurret.

SINT oppoſitæ ſectiones A,B:& hyperbole quædam A D ſectionem A in puncto A contingat; ipſi autem A D opponatur F. Dico F ſectioni B non occurrere. Ducatur enim à puncto A linea A C ſectiones contingens. ergo A C propter ipſam A D ſectioni F non occurret. & propter A non occurret ſectioni B. quare A C inter B,F ſectiones cadat neceſſe eſt: & iccirco B ſectioni F non occurrere manifeſtò conſtat.

ex demõſtratis in 33. ſecũdi huius.

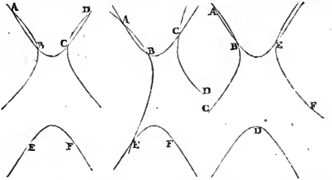


Digitized by Google

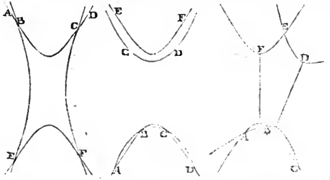
THEOREMA LIII. PROPOSITIO LIII.

OPPOSITÆ ſectiones oppoſitas non ſecant in pluribus punctis, quàm quatuor.

SINT oppoſitæ ſectiones A B, C D; & aliæ oppoſitæ A B C D, E F: & ſecet prius A B C D ſectio utranque ipſarum A B, C D in quatuor punctis A,B,C,D, 41.huius. convexa habens è regione ſita, ut in prima figura apparet. ergo quæ ſectioni A B C D opponitur, hoc eſt E F nulli ipſarum A B, C D occurret. Sed A B C ſectionem quidem A B ſecet in punctis A,B; ipſam verò C D in uno puncto C, ut 39.huius. in ſecunda figura. quare E F non occurret ſectioni C D. ſi autem ſectioni A B occurrit E F; in uno tantùm puncto occurrit: nam ſi in duobus punctis; ſectio



41.huius. A B C, quæ ipſi opponitur, non occurret alteri C D. atqui in uno puncto C occurrere ponitur. Quòd ſi A B C ſectionem A B E in duobus punctis A,B ſecet, ut in tertia figura: occurret quidem E F ſectioni A B E; ſectioni verò D non occur-35.huius. ret; atque ipſi A B E occurrens non occurret ad plura puncta, quàm duo. Si ve-40.huius. rò A B C D utranque ſecet in uno puncto, ut in quarta figura; E F nulli ipſa-



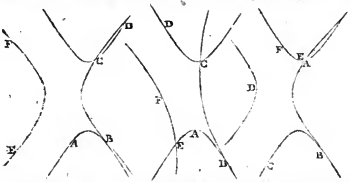
rum in duobus punctis occurret. ergo propter ea, quæ dicta ſunt, & ipſorum converſa, ſectiones A B C D, E F oppoſitis ſectionibus B E, C F non occurrent ad plu-

ad plura puncta, quàm quatuor. At ſi ſectiones ad eaſdem partes concava habeant; atque altera alteram in quatuor punctis A,B,C,D ſecet, ut in quinta figura: ſectio E F alteri non occurret. rurſus enim erit A B oppoſitis ſectionibus 42.huius.
A B C D, E F occurrens ad plura puncta, quàm quatuor. ſed neque C D occurret 36.huius.
ipſi E F. Si autem, ut in ſexta figura, ſectio A B C alteri occurrat in tribus punctis; E F alteri in uno tantùm puncto occurret. & eodem modo in reliquis dicemus. 44.huius.
Quoniam igitur iuxta omnes diſtinctiones conſtat illud, quod propoſitum eſt, oppoſitæ ſectiones oppoſitis ad plura puncta, quàm quatuor, non occurrent.

THEOREMA LIV. PROPOSITIO LIV.

SI oppoſitæ ſectiones oppoſitas in uno puncto contingant; non occurrent ſibi ipſis ad alia puncta plura, quàm duo.

SINT oppoſitæ ſectiones A B, C D; & aliæ B C D, E F: & B C D contingat A B in puncto B, convexa habens è regione ſita; occurratque primùm B C D ſectio ipſi C D in duobus punctis C, D, ut in prima figura apparet. Quoniam igitur B C D in duobus punctis ſecat, convexa habens è regione ſita: ſectio E F ipſi 39.huius.
A B non occurret. rurſus quoniam B C D contingit A B in B, convexa habens è regione ſita: non occurret E F ſectioni C D. quare E F nulli ſectionum A B, 52.huius.
C D occurret. occurrunt igitur ſibi ipſis ad duo tantùm puncta C, D. Sed B C ſe-



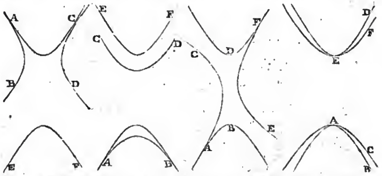
cet C D in uno puncto C, ut in ſecunda figura. ergo E F ſectioni quidem C D non 52.huius.
occurret; ipſi verò A B occurret in uno puncto tantùm: ſi enim in duobus punctis; non occurret B C ipſi C D. atqui in uno puncto occurrere ponebatur. 39.huius.
Quòd ſi B C non occurrat ſectioni D, ut in tertia figura; propter ea, quæ dicta 52.huius.
ſunt, E F ipſi D non occurret: & non occurret ipſi A B ad plura puncta, quàm 35.huius.
duo. At verò ſi ſectiones ad eaſdem partes concava habeant; demonſtrationes eædem accommodabuntur. quare iuxta omnes diſtinctiones illud, quod propoſitum eſt, ex iam demonſtratis manifeſtò conſtare poteſt.

THEOREMA LV. PROPOSITIO LV.

SI ſectiones oppoſitæ oppoſitas contingant in duobus punctis; in alio puncto ſibi ipſis non occurrent.

 SINT

SINT oppoſitæ ſectiones A B, C D: & aliæ A C, E F: & primùm in punctis A, C ſeſe contingant, ut in prima figura. Quoniam igitur A C utranque A B,
49.huius. C D contingit in punctis A, C: ſectio E F nulli ipſarum occurret. Contingant au-
51.huius. tem ſeſe, ut in ſecunda figura. ſimiliter C D ipſi E F non occurrere demonſtrabitur. Sed contingant ut in tertia figura; ſectio quidem C A ſectionem A B in A,
A ſectio verò D ipſam E F in F. Et quoniam C A contingit A B, convexa habens



è regione ſita, EF ſectioni AB non occurret. rurſus quoniã F D contingit E F: non occurret C A ipſi D F. Denique ſi C A contingat A B in A, & E F contingat E D in E, habentes concava ad eaſdem partes, ut in quarta figura; in alio pun-
50.huius. cto ſibi ipſis non occurrent: neque E F occurret ipſi A B. iuxta omnes igitur diſtinctiones ex iam demonſtratis conſtat illud, quod proponebatur.

FED. COMMANDINVS.

A ET quoniam C A contingit A B, convexa habens è regione ſita.) *Vide ne hic locus corruptus ſit, vel figura ipſa, nam cùm C A contingat A B, quæ ipſi opponitur, videlicet EF oppoſitæ ſectioni FD ex quinquageſima ſecunda huius occurrere non poteſt.*

QVARTI LIBRI APOLLONII FINIS.

Digitized by Google